- Kun y_t on osaketuotto ajankohtana t, kiinnostaa tietää millä todennäköisyydellä seuraavan periodin $t+1$ tuotto y_{t+1} alittaa valitun riskituoton rajan c.

- Tässä on järkevää laskea periodin $t+1$ tuoton ehdollinen todennäköisyys ehdolla tuoton ajankohtaan t asti ulottuva historia $\{y_t, y_{t-1}, \ldots\}$.

Ehdollisen varianssin mallintaminen

Mallin yleinen rakenne

- Kun y_t on osaketuotto ajankohtana t, kiinnostaa tietää millä todennäköisyydellä seuraavan periodin $t+1$ tuotto y_{t+1} alittaa valitun riskituoton rajan c.

- Tässä on järkevää laskea periodin $t+1$ tuoton ehdollinen todennäköisyys ehdolla tuoton ajankohtaan t asti ulottuva historia $\{y_t, y_{t-1}, \ldots\}$.
- Jos merkitään $\mathrm{P}_t(\cdot) = \mathrm{P}_t(\cdot \,|y_s,\ s \leq t)$, saadaan $(y_{t+1} = h_{t+1}^{1/2}\varepsilon_{t+1})$

$$\mathrm{P}_t(y_{t+1} < c) = \mathrm{F}_\varepsilon(c/h_{t+1}^{1/2}),$$

jossa $\mathrm{F}_\varepsilon(\cdot)$ on virhetermin ε_t kertymäfunktio.

- Kun y_t on osaketuotto ajankohtana t, kiinnostaa tietää millä todennäköisyydellä seuraavan periodin $t+1$ tuotto y_{t+1} alittaa valitun riskituoton rajan c.

- Tässä on järkevää laskea periodin $t+1$ tuoton ehdollinen todennäköisyys ehdolla tuoton ajankohtaan t asti ulottuva historia $\{y_t, y_{t-1}, \ldots\}$.
- Jos merkitään $\mathrm{P}_t(\cdot) = \mathrm{P}_t(\cdot \,|y_s,\ s \le t)$, saadaan $(y_{t+1} = h_{t+1}^{1/2}\varepsilon_{t+1})$

$$\mathrm{P}_t(y_{t+1} < c) = \mathrm{F}_\varepsilon(c/h_{t+1}^{1/2}),$$

  jossa $\mathrm{F}_\varepsilon(\cdot)$ on virhetermin ε_t kertymäfunktio.

- Jos $\mathrm{F}_\varepsilon(\cdot)$ ja h_{t+1} tunnetaan, voidaan oikealla oleva todennäköisyys laskea. Käytännössä molemmat joudutaan selvittämään aineistoa apuna käyttäen.

- Usein kysytään toisin päin kuin edellä.
- Mikä on annettua (pientä) todennäköisyyttä π vastaava riskiarvo c (engl. 'value at risk'), jolle pätee $\mathsf{P}_t\left(y_{t+1} < c\right) = \pi$?
- Vastaus saadaan hakemalla c, joka tunnetulle h_{t+1}:n arvolla toteuttaa

$$\mathsf{P}_t\left(y_{t+1} < c\right) = \mathsf{F}_\varepsilon(c/h_{t+1}^{1/2}) = \pi.$$

- Jotta yhtälöstä

$$y_t = h_t^{1/2}\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}\,(0,1)\,,$$

saataisiin käyttökelpoinen malli, täytyy ehdollisen varianssin h_t riippuvuus prosessin y_t menneisyydestä y_{t-j}, $j \geq 1$, spesifioida.

- Seuraavassa tarkastellaan *ns. autoregressivisiä ehdollisen heteroskedastisuuden malleja*, joita voidaan pitää ehdollisen varianssin standardimalleina ja siinä mielessä ARMA-mallien vastineina ehdollista varianssia mallinnettaessa.

- Määrittely:

$$y_t = h_t^{1/2}\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}\,(0,1)\,,$$

$$h_t = \omega + \alpha y_{t-1}^2, \quad \omega > 0 \;\text{ ja }\; \alpha \geq 0,$$

jossa $\omega > 0$ ja $\alpha \geq 0$, jotta $h_t > 0$ ja siten myös $\text{Var}\,(y_t) > 0$.

- Näiden yhtälöiden tai vain jälkimmäisen määrittelemää mallia kutsutaan *ensimmäisen asteen autoregressiiviseksi ehdollisen heteroskedastisuuden malliksi* eli ARCH(1)-malliksi ('autoregressive conditional heteroskedasticity').

- Jos $\alpha < 1$, on y_t sekä vahvasti että heikosti stationaarinen eli $\text{E}(y_t^2) < \infty$.

- Tällöin myös h_t on vahvasti, muttei välttämättä heikosti, stationaarinen. $\text{E}\,(h_t) < \infty$ kuitenkin pätee.

Ehdollisen varianssin mallintaminen
ARCH(1)-malli

- Malli

$$h_t = \omega + \alpha y_{t-1}^2, \quad \omega > 0 \;\text{ ja }\; \alpha \geq 0,$$

- Kun heikko stationaarisuus oletetaan, niin

$$\sigma_y^2 \equiv \text{Var}\left(y_t\right) = \text{E}\left(y_t^2\right) = \text{E}(h_t)$$

ja siten

$$\text{E}(y_t^2) \;=\; \omega + \alpha \text{E}(y_{t-1}^2) \;\Leftrightarrow\; \sigma_y^2 = \omega / \left(1 - \alpha\right)$$

Siis, $\alpha < 1$ on välttämätön (ja riittävä) ehto heikolle stationaarisuudelle.

- Stationaarisuuskysymykset hankalampia kuin ARMA-malleilla, koska y_t on epälineaarinen prosessi:

$$y_t = \left(\omega + \alpha y_{t-1}^2\right)^{1/2} \varepsilon_t$$

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{(i)} & y_t & = & h_t^{1/2}\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}\,(0,1)\,, \\
\text{(ii)} & h_t & = & \omega + \alpha y_{t-1}^2, \quad \omega > 0 \ \text{ ja } \ 0 < \alpha < 1 \quad \text{oletetaan.}
\end{array}
$$

- Jos $|y_{t-1}|$ on suuri, on ehdollinen varianssi h_t suuri (ks. (ii))
  - $\Rightarrow$ todennäköisyys havaita suuri $|y_t|$ tulee "kohtuullisen" suureksi (ks. (i))
  - $\Rightarrow$ seuraavan periodin ehdollinen varianssi h_{t+1} tulee myös suureksi.
- Siis, itseistarvoltaan suurilla havainnoilla on taipumus seurata toisiaan ja samoin pienillä eli volatiliteetissa havaitaan "klusteroitumista" (vrt. DAX-indeksi).

Ehdollisen varianssin mallintaminen
ARCH(1)-malli

- $y_t = h_t^{1/2}\varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim \text{iid}\,(0,1)$ ja $h_t = \omega + \alpha y_{t-1}^2$, $0 \le \alpha < 1 \Rightarrow$

$$y_t^2 = \omega + \alpha y_{t-1}^2 + \xi_t,$$

jossa $\xi_t = y_t^2 - h_t = h_t\left(\varepsilon_t^2 - 1\right)$ toteuttaa oletuksella $\mathrm{E}\left(y_t^4\right) < \infty$

$$\mathrm{E}\,(\xi_t) = 0 \quad \text{ja} \quad \mathrm{Cov}\,(\xi_t, \xi_{t-k}) = 0, \quad k > 0.$$

- Siis, prosessia y_t^2 voidaan tarkastella AR(1)-prosessina, jonka virheet ovat heikkoa valkoista kohinaa, mutta eivät vahvaa valkoista kohinaa:

$$\xi_t = \left(\omega + \alpha y_{t-1}^2\right)\left(\varepsilon_t^2 - 1\right) \quad \text{ja} \quad y_{t-1}^2 = \omega + \alpha y_{t-2}^2 + \xi_{t-1}.$$

Ehdollisen varianssin mallintaminen
ARCH(1)-malli

- $y_t = h_t^{1/2}\varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim \text{iid}\,(0,1)$ ja $h_t = \omega + \alpha y_{t-1}^2$, $0 \le \alpha < 1 \Rightarrow$

$$y_t^2 = \omega + \alpha y_{t-1}^2 + \xi_t, \qquad (*)$$

- Kun $\mathrm{E}(y_t^4) < \infty$, $\xi_t = \left(\omega + \alpha y_{t-1}^2\right)\left(\varepsilon_t^2 - 1\right)$ toteuttaa

$$\mathrm{E}\left(\xi_t\right) = 0 \;\; ja \;\; \mathrm{Cov}\left(\xi_t, \xi_{t-k}\right) = 0, \quad k > 0$$

- Kuten AR(1)-prosessin tapauksessa voidaan $(*)$:stä siten johtaa

$$\mathrm{Cor}\left(y_t^2, y_{t-k}^2\right) = \alpha^k, \quad k = 0, 1, \ldots .$$

(lin. prosessin autokovarianssifunktion johto pätee myös, kun virhetermi on vain autokorreloimaton)

Ehdollisen varianssin mallintaminen

ARCH(1)-malli

- Siis, oletuksella $\mathrm{E}(y_t^4) < \infty$ ARCH(1)-mallissa

  $$y_t = h_t^{1/2}\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}\,(0,1)\,,$$
  $$h_t = \omega + \alpha y_{t-1}^2, \quad \omega > 0 \;\text{ ja }\; \alpha \geq 0,$$

  pätee

  $$\mathrm{Cor}\left(y_t^2, y_{t-k}^2\right) = \alpha^k, \quad k = 0, 1, \dots\,.$$

  Koska $\alpha > 0$, on itseisarvoltaan suurilla (vast. pienillä) havainnoilla taipumusta seurata toisiaan eli volatiliteetilla on taipumusta klusteroitua.

- **Huom.**: Oletus $\mathrm{E}\left(y_t^4\right) < \infty$ vaatii enemmän kuin $\alpha < 1$. Täsmällinen ehto riippuu virhetermin ε_t jakaumasta. Jos $\varepsilon_t \sim \mathrm{N}\,(0,1)$, vaaditaan $\alpha^2 < 1/3$ eli $\alpha < \sqrt{1/3} \approx 0.577$, jolloin y_t^2:n autokorreloituneisuus on varsin heikkoa.

Ehdollisen varianssin mallintaminen
ARCH(1)-malli

- Vaikka ξ_t onkin heikkoa valkoista kohinaa ja $\mathrm{E}\left(\xi_t^2\right) < \infty$ pätisi, ei yhtälöä

$$y_t^2 = \omega + \alpha y_{t-1}^2 + \xi_t, \qquad (*)$$

voida tulkita tavanomaiseksi AR(1)-malliksi.

- Tämän syynä on prosessin ξ_t riippuvuus y_{t-1}:stä:

$$\xi_t = y_t^2 - h_t = h_t\left(\varepsilon_t^2 - 1\right) = \left(\omega + \alpha y_{t-1}^2\right)\left(\varepsilon_t^2 - 1\right).$$

Tämä tarkoittaa erityisesti, *että sen enempää heikkoa kuin vahvaakaan stationaarisuutta ei voida päätellä soveltaen AR(1) prosessille jaksossa 2.2.3 käytettyjä menettelyjä yhtälöön* $(*)$, *vaan stationaarisuus on perusteltava toisin.*

- Oletetaan, että satunnaismuuttujalle X pätee

$$\mathrm{E}\left(X^4\right) < \infty \quad \text{ja} \quad \mathrm{E}\left(X\right) = 0.$$

- Tällöin X:n jakauman huipukkuus on määritelmän mukaan

$$\kappa_X \quad = \quad \mathrm{E}(X^4) / \left(\mathrm{E}(X^2)\right)^2$$

  Määritelmä ei riipu X:n varianssista, joka voidaan skaalata ykköseksi.
- $\mathrm{N}\left(0, 1\right)$-jakauman huipukkuus on 3, joka usein vähennetään edellä esitetystä huipukkuuden määritelmästä.

- Oletetaan $\mathsf{E}\left(y_t^4\right) < \infty$. Rakenneyhtälö $y_t = h_t^{1/2}\varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim \mathrm{iid}\left(0,1\right)$, ja riippumattomuus $h_t \perp\!\!\!\perp \varepsilon_t \Rightarrow$

$$\mathsf{E}\left(y_t^4\right) = \mathsf{E}\left(h_t^2\right)\mathsf{E}\left(\varepsilon_t^4\right) \geq \left(\mathsf{E}\left(h_t\right)\right)^2 \mathsf{E}\left(\varepsilon_t^4\right) = \left(\mathsf{E}\left(y_t^2\right)\right)^2 \mathsf{E}\left(\varepsilon_t^4\right).$$

- Siis,

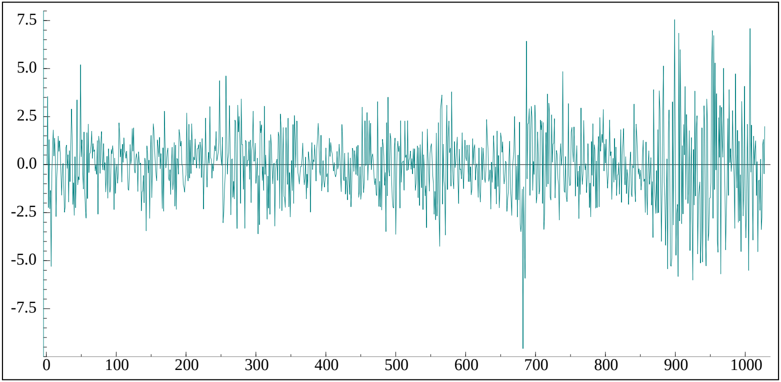
$$\kappa_y \equiv \frac{\mathsf{E}\left(y_t^4\right)}{\left(\mathsf{E}\left(y_t^2\right)\right)^2} \geq \frac{\mathsf{E}\left(\varepsilon_t^4\right)}{\left(\mathsf{E}\left(\varepsilon_t^2\right)\right)^2} \equiv \kappa_\varepsilon.$$

  eli y_t:n jakauman huipukkuus ylittää ε_t:n jakauman huipukkuuden.

- Tapauksessa $\varepsilon_t \sim \mathsf{N}\left(0,1\right)$ pätee $\kappa_y = 3\left(1-\alpha^2\right) / \left(1-3\alpha^2\right)$ joten $\kappa_y > 3 = \mathsf{N}\left(0,1\right)$-jakauman huipukkuus.

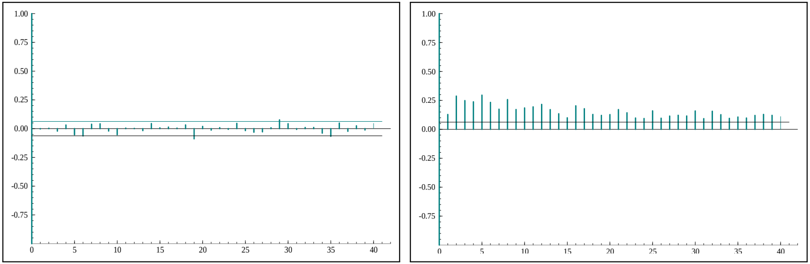
- Epäyhtälön $\kappa_y \geq \kappa_\varepsilon$ perustelussa käytettiin vain y_t:n stationaarisuutta, oletusta $\mathrm{E}(y_t^4) < \infty$ ja rakenneyhtälöä $y_t = h_t^{1/2}\varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim \text{iid}\,(0,1)$.
- Näin ollen tämä epäyhtälö on ominainen kaikille rakenneyhtälöön perustuville malleille.
- Kuvion 5.1 DAX-indeksistä saadaan κ_y:n estimaatiksi $4.79 > 3$.
- Tällainen normaalijakaumaa suurempaa huipukkuus on volatiliteetin klusteroitumisen lisäksi toinen tyypillinen piirre osake- ja valuuttakurssituotoilla. Nämä piirteet on nähty niin tyypillisiksi, että niiden yhteydessä käytetään englannin kielessä nimitystä 'stylized fact'.

Ehdollisen varianssin mallintaminen



Kuvio 5.1(i). Frankfurtin pörssin DAX-indeksin päivätuotot ajalta 1.1.1999 - 31.1.2003. Tuotot on laskettu kaavalla $y_t = 100\,(\log P_t - \log P_{t-1})$, jossa P_t on indeksin arvo päivänä t.

Ehdollisen varianssin mallintaminen



Kuvio 5.1(ii). Frankfurtin pörssin DAX-indeksin päivätuotoista ajalta 1.1.1999 - 31.1.2003 laskettu otosautokorrelaatiofunktio (vas.) ja neliöiden otosautokorrelaatiofunktio (oik.) viipymillä $h = 1, \ldots, 40$.

- DAX-indeksistä ensimmäisen autokorrelaation Cor $\left(y_t^2, y_{t-1}^2\right)$ estimaatti on vain 0.13.
- Koska ARCH(1)-mallissa Cor $\left(y_t^2, y_{t-1}^2\right) = \alpha$, täytyisi α:n olla pieni, jotta ARCH(1) olisi sopiva malli.
- Koska lisäksi, Cor $\left(y_t^2, y_{t-k}^2\right) = \alpha^k$, täytyisi neliöityjen havaitojen autokorrelaatioiden vaimentua nopeasti nollaa kohti.
- Näin ei selvästikään käy, mikä viittaa yleisemmän mallin tarpeellisuuteen.

- ARCH(1)-mallin ilmeinen yleistys on ARCH(s)-malli,

$$\begin{aligned} y_t &= h_t^{1/2}\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}\,(0,1)\,, \\ h_t &= \omega + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_s y_{t-s}^2. \end{aligned}$$

  Jotta vaatimus $h_t > 0$ ja siten $\text{Var}\,(y_t) > 0$ toteutuisi, oletetaan $\omega > 0$ ja $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, ..., s$.

- h_t:n yhtälöstä saadaan

$$y_t^2 = \omega + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_s y_{t-s}^2 + \xi_t,$$

  jossa jälleen $\xi_t = y_t^2 - h_t = h_t\left(\varepsilon_t^2 - 1\right)$ ja, kuten ARCH(1)-tapauksessa, pätee $\text{E}\,(\xi_t) = 0$ (kun $\text{E}\left(y_t^2\right) < \infty$) ja ξ_t:n autokorreloimattomuus (kun $\text{E}\left(y_t^4\right) < \infty$).

Ehdollisen varianssin mallintaminen
ARCH(s)-malli

- *Olettaen* heikko stationaarisuus seuraa yhtälöstä

  $y_t^2 = \omega + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_s y_{t-s}^2 + \xi_t$

  $$\mathrm{E}(y_t^2) = \omega + \alpha_1 \mathrm{E}(y_{t-1}^2) + \cdots + \alpha_s \mathrm{E}(y_{t-s}^2) + \mathrm{E}(\xi_t)$$

  ja edelleen, koska $\mathrm{E}(\xi_t) = 0$ ja $\mathrm{E}(y_t^2) = \sigma_y^2 \quad \forall t$,

  $$\sigma_y^2 = \omega + \alpha_1 \sigma_y^2 + \cdots + \alpha_s \sigma_y^2.$$

- Siis,

  $$\sigma_y^2 = \omega / (1 - \alpha_1 - \cdots - \alpha_s),$$

  joten välttämätön ehto heikolle stationaarisuudelle on $\alpha_1 + \cdots + \alpha_s < 1$, joka on myös riittävä sekä heikolle että vahvalle stationaarisuudelle.

- Koska $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, ..., s$, voidaan osoittaa tulos

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_s < 1 \;\Leftrightarrow\; 1 - \alpha_1 z - \cdots - \alpha_s z^s \neq 0, \quad |z| \leq 1.$$

- Kuten tapauksessa $s = 1$, *ARCH(s)-prosessin stationaarisuutta ei kuitenkaan voida päätellä soveltamalla AR(s)-prosessin stationaarisuusehtoa muodollisesti samanlaiseen prosessiin*

$$y_t^2 = \omega + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_s y_{t-s}^2 + \xi_t,$$

jossa ξ_t on heikkoa valkoista kohinaa.

- Jos oletetaan stationaarisuus ja $\mathrm{E}(y_t^4) < \infty$, voidaan tätä yhtälöä ja ξ_t:n autokorreloimattomuutta käyttäen johtaa neliöidyn prosessin y_t^2 autokovarianssi- ja autokorrelaatiofunktio samaan tapaan kuin AR(p)-prosessin tapauksessa (ks. jakso 3.1).

- Yhtälön

$$y_t^2 = \omega + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_s y_{t-s}^2 + \xi_t, \quad \xi_t \sim \text{wn}\left(0, \cdot\right)$$

perusteella on selvää, että ARCH-tyyppinen ehdollinen heteroskedastisuus ilmenee aikasarjan neliöiden autokorreloituneisuutena.
- Neliöityjen havaintojen otosautokorrelaatioita ja McLeodin ja Lin testisuuretta voidaan siten käyttää testattaessa nollahypoteesia $y_t \sim \text{iid}\left(0, \sigma^2\right)$ ARCH-tyyppistä ehd. heteroskedastisuutta vastaan.
- Voidaan osoittaa, että tämä testi on asymptoottisesti yhtäpitävä Raon pistemäärätestin kanssa, kun rakenneyhtälössä

$$y_t = h_t^{1/2} \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{nid}\left(0, 1\right),$$

oletetaan normaalisuus ja vaihtoehtona on ARCH(s)-malli, jossa s on McLeodin ja Lin testisuureessa käytettyjen otosautokorrelaatioiden lukumäärä.

- On havaittu, että sovellettaessa ARCH(s)-mallia vaaditaan usein suuri s:n arvo ja siten suuri määrä estimoitavia parametreja.
- Onnistuneeksi vähäparametriseksi vaihtoehdoksi on osoittautunut ns. GARCH(1,1)-malli (G $\leftrightarrow$ 'generalized')

$$\begin{aligned} y_t &= h_t^{1/2}\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}\,(0,1)\,, \\ h_t &= \omega + \beta h_{t-1} + \alpha y_{t-1}^2, \end{aligned}$$

jossa vaatimuksen $h_t > 0$ vuoksi oletetaan $\omega > 0$, $\alpha \geq 0$ ja $\beta \geq 0$.

- Tapaus $\alpha = 0$ vain, jos samalla $\beta = 0$, koska muuten h_t:n differenssiyhtälöstä tulee ei-satunnainen.

Ehdollisen varianssin mallintaminen

GARCH(1,1)-malli

- Yhtälö $h_t = \omega + \beta h_{t-1} + \alpha y_{t-1}^2$ & peräkkäiset sijoitukset $\Rightarrow$

$$h_t = \omega \sum_{j=0}^{k} \beta^j + \alpha \sum_{j=0}^{k} \beta^j y_{t-1-j}^2 + \beta^{k+1} h_{t-k-1}.$$

- Tämä viittaa siihen, että tapauksessa $\beta < 1$ saadaan

$$h_t = \omega \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j y_{t-1-j}^2$$

  eli GARCH(1,1)-malli voidaan tulkita (tietyn tyypiseksi) ARCH(∞)-malliksi.

- Ehto $\beta < 1$ ei kuitenkaan riitä takaamaan y_t:n stationaarisuutta eikä äärellistä varianssia.
- Riittävä ehto vahvalle ja heikolle stationaarisuudelle on $\alpha + \beta < 1$.