

# Otoskeskiarvon ja otosautokorrelaatiofunktion ominaisuuksia (oletetaan heikko ja vahva stationaarisuus)

- Jos edellä oletetaan lisäksi, että  $y_t$  normaalinen, on otoskeskiarvo normaalisti jakautunut ja asymptoottisesti saadaan tulos

$$\sqrt{T} (\bar{y} - \mu) \xrightarrow{d} N \left( 0, \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_h \right) \quad \text{eli} \quad \bar{y} \underset{as}{\sim} N \left( \mu, \frac{1}{T} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_h \right).$$

- Tämä voidaan perustella myös ilman  $y_t$ :n normalisuutta.
- Yleisesti tavanomainen suurten lukujen laki ja keskeinen raja-arvolause pätevät myös stationaarisille prosesseille "varsin yleisin oletuksin".
- Odotusarvoa  $\mu$  koskevia testejä ja luottamusvälejä varten täytyy ääretön summa  $\sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_h$  estimoida. Sopiva estimaattori on

$$\sum_{h=-K}^K (1 - |h| / T) c_h,$$

jossa  $c_h$  on otosautokovarianssikerroin ja  $K$  on valittu "sopivasti"  $T$ :tä pienemmäksi (esimerkiksi  $K \approx \sqrt{T}$ ).

# Otoskeskiarvon ja otosautokorrelaatiofunktion ominaisuuksia (oletetaan heikko ja vahva stationaarisuus)

- Otosautokorrelaatiokertoimien  $r_h = c_h/c_0$  tilastollisten ominaisuuksien tarkastelu on monimutkaisempaa kuin otoskeskiarvon.
- Tarkentuvuus ja asymptoottinen normalisuus voidaan todeta "varsin yleisin oletuksin", mutta asymptoottisen jakauman varianssit ja kovarianssit ovat erikoistapauksia lukuun ottamatta käytännön kannalta hankalia.
- Tapauksessa  $y_t \sim \text{iid}(\mu, \sigma^2)$  pätee ( $I_H$  ( $H \times H$ ) yksikkömatriisi)

$$(r_1, \dots, r_H) \underset{as}{\sim} N(0, T^{-1} I_H).$$

# Otoskeskiarvon ja otosautokorrelaatiofunktion ominaisuuksia (oletetaan heikko ja vahva stationaarisuus)

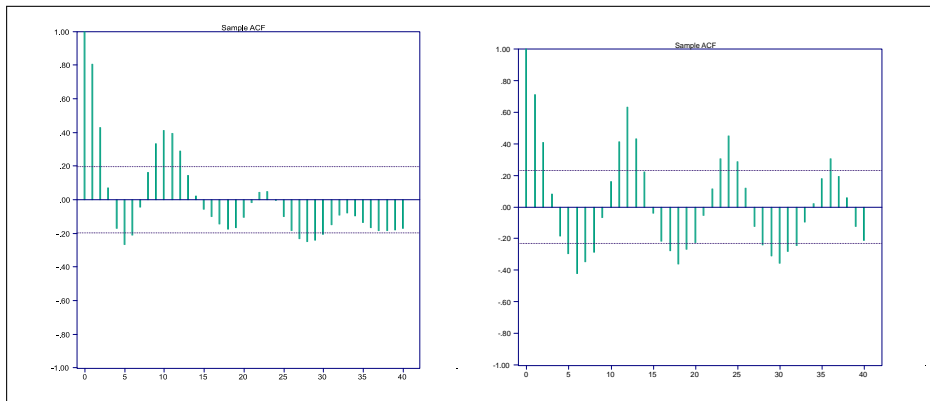
- Oletetaan nollahypoteesi  $y_t \sim \text{iid}(\mu, \sigma^2)$ .
- Tällöin estimaattorit  $r_1, \dots, r_H$  ovat likimain riippumattomia ja  $N(0, T^{-1})$ -jakautuneita, joten

$$P \left\{ |r_h| \geq 1.96 / \sqrt{T} \right\} \approx 0.05.$$

- Tätä voidaan käyttää yksittäisten otosautokorrelaatioiden suuruuden arvioimiseen (vrt. esim. Kuvio 2.1).
- Lisäksi voidaan muodostaa testisuure

$$Q = T \sum_{h=1}^H r_h^2 \underset{as}{\sim} \chi_H^2,$$

jonka suuret arvot ovat kriittisiä.



**Kuvio 2.1.** Auringonpilkusarjan otosautokorrelaatiofunktio (vasemmalla) ja onnettomuussarjan otosautokorrelaatiofunktio (oikealla) viipymillä  $h = 0, \dots, 40$ .

- Yksittäinen estimaattori  $r_h$  kuuluu likimain 95%:n todennäköisyydellä kuvioihin piirrettyjen rajojen väliin, jos  $y_t \sim \text{iid}(\mu, \sigma^2)$ .

# Otoskeskiarvon ja otosautokorrelaatiofunktion ominaisuuksia (oletetaan heikko ja vahva stationaarisuus)

- Ljungin ja Boxin ehdottaman modifioidun testisuureen

$$Q_{LB} = T(T+2) \sum_{h=1}^H r_h^2 / (T-h) \underset{as}{\sim} \chi_H^2$$

jakauman on todettu olevan pienissä otoksissa lähempänä  $\chi_H^2$ -jakaumaa kuin alkuperäisen testisuureen  $Q$  jakauman.

- Kummankin testisuureen toimivuus edellyttää, ettei  $H$  ole kovin suuri suhteessa havaintojen lukumäärään  $T$ .

# Otoskeskiarvon ja otosautokorrelaatiofunktion ominaisuuksia (oletetaan heikko ja vahva stationaarisuus)

- Autokorrelaatiofunktio voi paljastaa vain lineaarisen riippuvuuden, mutta ei epälineaarisia riippuvuuksia (poikkeuksena normaaliset prosessit).
- Esimerkiksi prosessi (Esim. 2.2(ii))

$$y_t = \varepsilon_t \sqrt{\omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2}, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2), \quad \omega > 0, \quad \alpha > 0,$$

on autokorreloimaton, mutta ei riippumaton.

- Jos oletetaan  $E(y_t^4) < \infty$ , nähdään tämä konkreettisesti laskemalla neliöidyn prosessin  $y_t^2$  ensimmäinen autokovarianssikerroin, joka on nolasta poikkeava.

# Otoskeskiarvon ja otosautokorrelaatiofunktion ominaisuuksia (oletetaan heikko ja vahva stationaarisuus)

- Rajoitettuna testinä mahdollisen epälineaarisen riippuvuuden paljastamiseksi voidaan tutkia havaintojen neliöiden autokorreloituneisuutta.
- Jos  $y_t \sim \text{iid}(\mu, \sigma^2)$  ja  $E(y_t^4) < \infty$ , voidaan autokorrelaatiota tutkia käyttäen neliöityjä havaintoja  $y_t^2$  aivan kuten edellä. Erityisesti pätee

$$(r_1, \dots, r_H) \underset{as}{\sim} N(0, T^{-1}I_H)$$

ja  $Q$ - ja  $Q_{LB}$ -testisuureet toimivat kuten alkuperäisten havaintojen tapauksessa.

- Neliöityjen havaintojen autokorrelaatiot kiinnostavat erityisesti analysoitaessa finanssiaikasarjoja, jotka ovat itsessään usein lähes autokorreloimattomia.

- Määrittely-yhtälö

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2),$$

- tai kun  $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$

$$\phi(B) y_t = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2).$$

- Prosessin nykyisen arvon oletetaan siis riippuvan lineaarisesti  $p$ :n edellisen periodin arvosta ja ei-havaittavasta satunnaissokista tai virhetermistä (tai innovaatiosta) aivan kuten lineaarisessa mallissa.



# AR(p)-prosessi

## AR(p)-prosessin riittävä stationaarisuusehto

- Riittävä ehto AR(p)-prosessin

$$\phi(B)y_t = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2).$$

stationaarisuudelle on, että polynomin

$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p \quad (z \in \mathbb{C})$$

juuret sijaitsevat kompleksitasossa yksikköympyrän kehän ulkopuolella.

- Sama yhtäpitävästi:

$$\phi(z) \neq 0, \quad \text{kun } |z| \leq 1.$$

# AR(p)-prosessi

AR(p)-prosessin riittävä stationaarisuusehto

- $\phi(B)y_t = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$
- $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p \neq 0, \quad \text{kun } |z| \leq 1 \quad (z \in \mathbb{C})$
- Tällöin ( $|\zeta_j| > 1$ )
  - $(1 - \zeta_1^{-1}B) \dots (1 - \zeta_p^{-1}B) y_t = \varepsilon_t$
  - $(1 - \zeta_2^{-1}B) \dots (1 - \zeta_p^{-1}B) y_t = (1 - \zeta_1^{-1}B)^{-1} \varepsilon_t$
  - $(1 - \zeta_3^{-1}B) \dots (1 - \zeta_p^{-1}B) y_t = (1 - \zeta_2^{-1}B)^{-1} (1 - \zeta_1^{-1}B)^{-1} \varepsilon_t$
  - $\vdots$
  - $y_t = (1 - \zeta_2^{-1}B)^{-1} \dots (1 - \zeta_1^{-1}B)^{-1} \varepsilon_t = \phi(B)^{-1} \varepsilon_t,$

jossa oikealla aina station. lin. prosessi.

# AR(p)-prosessi

## Lineaarinen esitys

- Kun  $\phi(z) \neq 0, |z| \leq 1$ , voidaan AR(p)-prosessi

$$\phi(B)y_t = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2),$$

kirjoittaa

$$y_t = \phi(B)^{-1} \varepsilon_t = \psi(B) \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j},$$

jossa  $\psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j = \phi(B)^{-1}$  ja  $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$ .

- Kun  $\phi(z) \neq 0$ ,  $|z| \leq 1$ , voidaan AR(p)-prosessi

$$\phi(B)y_t = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2),$$

kirjoittaa

$$y_t = \phi(B)^{-1} \varepsilon_t = \psi(B) \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j},$$

jossa  $\psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j = \phi(B)^{-1}$  ja  $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$ .

- Kertoimet  $\psi_j$  voidaan ratkaista kertoimien  $\phi_1, \dots, \phi_p$  funktiona asettamalla  $B^j$ :n kertoimet samoiksi yhtälössä

$$\left(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p\right) (\psi_0 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots) = 1.$$

# AR(p)-prosessi

Nollasta poikkeava odotusarvo

- Käytännössä oletus  $E(y_t) = 0$  yleensä epärealistinen.
- Nollasta poikkeava odotusarvo voidaan ottaa huomioon korvaamalla  $y_t$  prosessilla  $y_t - \mu$ , jolloin

$$\phi(B)(y_t - \mu) = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2),$$

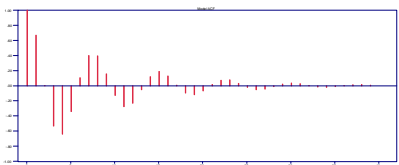
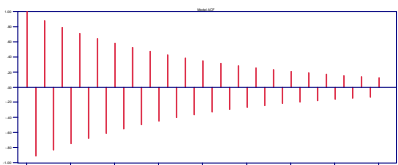
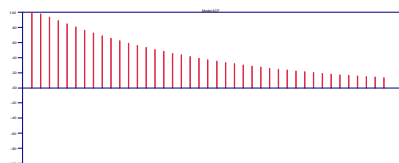
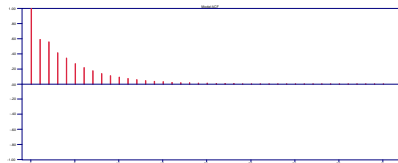
ja  $E(y_t) = \mu$ .

- Vaihtoehtoisesti,

$$\phi(B)y_t = v + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2),$$

jossa  $v = \phi(B)\mu = \phi(1)\mu = \mu - \phi_1\mu - \dots - \phi_p\mu$

- Huom.: Ehdosta  $\phi(z) \neq 0, |z| \leq 1$  seuraa, että  $\phi(1) \neq 0$ .



**Kuvio 3.1.** AR(2)-prosessin  $(1 - \zeta_1^{-1}B)(1 - \zeta_2^{-1}B)y_t = \varepsilon_t$ ,  $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$ , autokorrelaatiofunktioita ( $h = 0, \dots, 40$ ). Käänetyt juuret  $\zeta_1^{-1} = 0.8$ ,  $\zeta_2^{-1} = -0.4$  (vas. ylh),  $\zeta_1^{-1} = 0.95$ ,  $\zeta_2^{-1} = 0.3$  (oik. ylh.),  $\zeta_1^{-1} = -0.95$ ,  $\zeta_2^{-1} = 0.3$  (vas. alh.) ja  $\zeta_1^{-1} = 1/(0.75 + 0.83i)$ ,  $\zeta_2^{-1} = 1/(0.75 - 0.83i)$ ,  $|\zeta_1^{-1}| = |\zeta_2^{-1}| = 0.89$  (oik. alh.).

# AR(p)-prosessi

## Yule-Walker -yhtälöt

- $\rho_1 = \phi_1 + \phi_2\rho_1 + \cdots + \phi_p\rho_{p-1}$   
 $\rho_2 = \phi_1\rho_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_p\rho_{p-2}$

$\vdots$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\rho} = \mathbf{P}\boldsymbol{\phi},$$

$$\rho_p = \phi_1\rho_{p-1} + \phi_2\rho_{p-2} + \cdots + \phi_p,$$

jossa  $\boldsymbol{\rho} = [\rho_1 \cdots \rho_p]'$ ,  $\boldsymbol{\phi} = [\phi_1 \cdots \phi_p]'$  ja  $\mathbf{P} = [\rho_{i-j}]_{i,j=1,\dots,p}$ .

- Parametrivektorille  $\boldsymbol{\phi}$  saadaan siten esitys

$$\boldsymbol{\phi} = \mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\Gamma}^{-1}\boldsymbol{\gamma}, \text{ jossa } \boldsymbol{\gamma} = \gamma_0\boldsymbol{\rho} \text{ ja } \boldsymbol{\Gamma} = \gamma_0\mathbf{P}.$$