- Vaikka normaalisuusoletus ei pätisikään, voidaan virheelliseen normaaliseen uskottavuusfunktioon perustuvalle estimaattorille $\hat{\delta}$ johtaa yleisin oletuksin tulos

$$\hat{\delta} \underset{as}{\sim} \mathrm{N}\left(\delta, \mathbf{V}(\delta)^{-1} \mathbf{B}(\delta) \mathbf{V}(\delta)^{-1}\right),$$

  jossa

$$\mathbf{B}(\delta) = E\left[\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{\partial}{\partial\delta}\tilde{l}_t(\delta)\right)\left(\frac{\partial}{\partial\delta}\tilde{l}_t(\delta)\right)'\right],$$

  ja $\tilde{l}_t(\delta)$ on havainnon y_t log-uskottavuus eli

$$\tilde{l}_t(\delta) = -\frac{1}{2}\log h_t(\delta) - \frac{y_t^2}{2h_t(\delta)}.$$

- Jos normaalisuusoletus pätee, pätee yleisen uskottavuusteorian mukainen tulos $\mathbf{B}(\delta) = \mathbf{V}(\delta)$.

$$\hat{\delta} \underset{as}{\sim} \mathrm{N}\left(\delta, \mathbf{V}(\delta)^{-1}\mathbf{B}(\delta)\mathbf{V}(\delta)^{-1}\right), \quad (**)$$

- Käyttäen matriisien $\mathbf{V}(\delta)$ ja $\mathbf{B}(\delta)$ empiirisiä vastineita

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{V}}(\hat{\delta}) &= -\partial^2\tilde{l}(\hat{\delta})/\partial\delta\partial\delta' \\ \hat{\mathbf{B}}(\hat{\delta}) &= \sum_{t=1}^{T}\left(\frac{\partial}{\partial\delta}\tilde{l}_t(\hat{\delta})\right)\left(\frac{\partial}{\partial\delta}\tilde{l}_t(\hat{\delta})\right)'\end{aligned}$$

voidaan tulokseen $(**)$ perustaa Waldin testin tyyppisiä testejä tilastollisen päättelyn kurssilla esitetyllä tavalla.

- Erityisesti matriisin $\hat{\mathbf{V}}(\hat{\delta})^{-1}\hat{\mathbf{B}}(\hat{\delta})\hat{\mathbf{V}}(\hat{\delta})^{-1}$ diagonaalialkioiden neliöjuuria voidaan käyttää $\hat{\delta}$:n komponenttien likimääräisinä keskivirheinä.

- Jos normaalisuusoletus $\varepsilon_t \sim \mathrm{N}\left(0,1\right)$ pätee, pätee

$$\hat{\delta} \underset{as}{\sim} \mathrm{N}\left(\delta, \mathbf{V}\left(\delta\right)^{-1}\mathbf{B}\left(\delta\right)\mathbf{V}\left(\delta\right)^{-1}\right), \quad \mathbf{B}\left(\delta\right) = \mathbf{V}\left(\delta\right).$$

- Tällöin voidaan Waldin testi ja keskivirheet muodostaa tavanomaiseen tapaan eli valita

$$\hat{\mathbf{B}}(\hat{\delta}) = \hat{\mathbf{V}}(\hat{\delta}) = -\,\partial^2\tilde{l}(\hat{\delta})/\partial\delta\partial\delta'$$

ja myös uskottavuusosamäärätestiä voidaan käyttää tavanomaiseen tapaan.

- Jos normaalisuusoletus ei päde, ei uskottavuusosamäärätestin tavanomainen asymptoottinen χ^2–jakauma kuitenkaan päde.

- Edellä mainittujen testimenetelmien käyttöä rajoittaa se, etteivät ne toimi (välttämättä), jos hypoteesi rajoittaa jonkun GARCH(r,s)-mallin parametreista $\beta_1, .., .\beta_r$ tai $\alpha, ..., \alpha_s$ nollaksi.
- Näin käy, kun ehdon $h_t > 0$ takaamiseksi vaaditaan $\beta_i \geq 0$ ja $\alpha_i \geq 0$, sillä (esim.) tavanomainen uskottavuuspohjainen testiteoria ei salli parametrien sijaitsevan parametriavaruuden reunalla. GARCH(1,1)-mallissa ehto $\beta_1 \geq 0$ ja $\alpha_1 \geq 0$ on välttämätön.
- Vaikka ehto $\beta_i \geq 0$ ja $\alpha_i \geq 0$ ei olekaan välttämätön, kun $r > 1$ tai $s > 1$, voi käytettävä etimointialgoritmi olettaa sen, jolloin testit eivät toimi tavanomaisella tavalla ja testitulokset on tulkittava suuntaa-antavina
- Edellä todettu on pätee myös seuraavissa testeihin liittyvissä tarkasteluissa.

- Esitetyt asymptoottiset tulokset voidaan osoittaa päteväksi siinäkin tapauksessa, että heikon stationaarisuuden ehto ei päde eikä h_t:tä voida siten tulkita ehdolliseksi varianssiksi.
- Esimerkiksi GARCH(1,1)-mallissa voi olla $\alpha + \beta \geq 1$, kunhan $\mathrm{E}\left[\log\left(\beta + \alpha\varepsilon_t^2\right)\right] < 0$ pätee. Näin saattaa käydä joissakin vahvasti heteroskedastisissa tapauksissa.
- Vaikka h_t ei olisikaan ehdollinen varianssi, on yhtälön $y_t = h_t^{1/2}\varepsilon_t$ perusteella selvää, että se kuvaa havaitussa aikasarjassa ilmenevää "volatiilisuutta".

- Tarkastellaan yleistä mallia

$$y_t = h_t^{1/2}\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathrm{iid}\,(0,1)\,,$$

- Ei-normaalisista jakaumista yleisimmin käytetty lienee t-jakauma, jonka vapausasteluku on reaalinen ja joka standardoidaan siten, että $\mathsf{E}(\varepsilon_t^2) = 1$ pätee.

- Tällöin ε_t:n tiheysfunktio on

$$\mathrm{t}\,(\varepsilon_t;\eta) = \frac{\Gamma\left(\left(\eta+1\right)/2\right)}{\sqrt{\pi\left(\eta-2\right)}\Gamma\left(\eta/2\right)}\left(1+\frac{\varepsilon_t^2}{\eta-2}\right)^{-(\eta+1)/2},$$

jossa $\Gamma\left(\cdot\right)$ on gammafunktio ja reaalinen (ja tuntematon) vapausasteluku $\eta > 2$ ($\eta > 4$, jos $\mathsf{E}(\varepsilon_t^4) < \infty$ halutaan).

- Kuten normaalijakauman tapauksessa perustetaan uskottavuusfunktio ehdolliseen tiheysfunktioon (tämän aikaisempi johto ei vaatinut normaalijakaumaa)

$$f_{\mathbf{Y}_T} / f_{\mathbf{Y}_0} = \prod_{t=1}^{T} f_{y_t|\mathbf{Y}_{t-1}}$$

- Satunnaismuuttujan $y_t = h_t^{1/2}\varepsilon_t$ ehdollinen tiheysfunktio ehdolla $\{y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots\}$ on nyt $h_t^{-1/2}\mathrm{t}(y_t / h_t^{1/2}; \eta)$ eli

$$f_{y_t|\mathbf{Y}_{t-1}} = h_t^{-1/2}\mathrm{t}(y_t / h_t^{1/2}; \eta),$$

joten (approksimatiiviseksi) log-uskottavuusfunktioksi saadaan

$$\tilde{l}(\delta; \eta) = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} \log h_t(\delta) + \sum_{t=1}^{T} \log \mathrm{t}(y_t / h_t^{1/2}(\delta); \eta),$$

- Jos t-jakaumaoletus on oikea ja $\boldsymbol{\vartheta} = (\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\eta})$, pätee SU-estimaattorille $\hat{\boldsymbol{\vartheta}} = (\hat{\boldsymbol{\delta}}, \hat{\boldsymbol{\eta}})$

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}} \underset{as}{\sim} \mathsf{N}\left(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{V}(\boldsymbol{\vartheta})^{-1}\right),$$

  jossa $\mathbf{V}(\boldsymbol{\vartheta}) = \mathsf{E}\left[-\partial^2 \tilde{l}(\boldsymbol{\vartheta}) / \partial\boldsymbol{\vartheta}\partial\boldsymbol{\vartheta}'\right]$.

- Käyttäen matriisin $\mathbf{V}(\boldsymbol{\vartheta})$ empiiristä vastinetta

$$\hat{\mathbf{V}}(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}) = \left[-\partial^2 \tilde{l}(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}) / \partial\boldsymbol{\vartheta}\partial\boldsymbol{\vartheta}'\right]$$

  voidaan muodostaa Waldin testejä tavanomaiseen tapaan.

- Erityisesti matriisin $\hat{\mathbf{V}}(\hat{\boldsymbol{\vartheta}})^{-1}$ diagonaalialkioiden neliöjuuria voidaan käyttää estimaattorin $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$ komponenttien likimääräisinä keskivirheinä.

- Jos t-jakaumaoletus on virheellinen, voidaan käyttää tulosta

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}} \underset{as}{\sim} \mathrm{N}\left(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{V}(\boldsymbol{\vartheta})^{-1}\mathbf{B}(\boldsymbol{\vartheta})\mathbf{V}(\boldsymbol{\vartheta})^{-1}\right),$$

jossa

$$E\left[\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\vartheta}}\tilde{l}_t(\boldsymbol{\vartheta})\right)\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\vartheta}}\tilde{l}_t(\boldsymbol{\vartheta})\right)'\right],$$

ja $\tilde{l}_t(\boldsymbol{\vartheta})$ on havainnon y_t log-uskottavuus eli

$$\tilde{l}_t(\boldsymbol{\vartheta}) = -\frac{1}{2}\log h_t(\delta) + \log \mathrm{t}(y_t / h_t^{1/2}(\delta); \eta).$$

- Keskivirheet ja Waldin testit käyttäen matriiseja $\hat{\mathbf{V}}(\hat{\boldsymbol{\vartheta}})$ ja

$$\hat{\mathbf{B}}(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}) = \sum_{t=1}^{T}\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\vartheta}}\tilde{l}_t(\hat{\boldsymbol{\vartheta}})\right)\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\vartheta}}\tilde{l}_t(\hat{\boldsymbol{\vartheta}})\right)'.$$

- Kun mallin parametrit on estimoitu, on syytä tutkia estimoidun mallin riittävyyttä samaan tapaan kuin ARMA-malleissakin.
- Residuaalien $\hat{\varepsilon}_t = y_t / \hat{h}_t^{1/2}$ aikasarja on hyvä piirtää ja tutkia havaitaanko poikkeamia tehdyistä oletuksista.
- Tehdyn jakaumaoletuksen realistisuutta voidaan tutkia residuaalien histogrammin avulla tavanomaiseen tapaan.
- Usein residuaalien jakauman on havaittu olevan huipukkaampi ja paksuhäntäisempi kuin normaalijakauma.
- Estimoidun mallin kykyä kuvata sarjan ehdollista heteroskedastisuutta voidaan tutkia neliöityjen residuaalien $\hat{\varepsilon}_t^2$ otosautokorrelaatiofunktion avulla. "Tavanomainen" kriittinen raja $1.96/\sqrt{T}$ ei ole kuitenkaan (edes asymptoottisesti) pätevä.

- Residuaaleista $\hat{\varepsilon}_t$ lasketun McLeodin ja Lin testisuureen asymptoottinen jakauma ei myöskään ole "tavanomainen" χ^2-jakauma.
- Saman tyyppisiä testejä on kehitetty ja liitetty myös joihinkin yleisesti käytössä oleviin ohjelmistoihin.
- Valitun mallin riittävyyttä voidaan tutkia myös estimoimalla laajempia vaihtoehtoja. Esimerkiksi usein esiintyvän GARCH(1,1)-mallin tapauksessa voidaan estimoida GARCH(2,1)- ja GARCH(1,2)-mallit ja tutkia lisäparametrien tarpeellisuutta.
- Edellisessä on kuitenkin syytä muistaa testien "reunapisteongelma" ja että GARCH(1,1)-mallin ollessa oikea ei testi GARCH(2,2)-mallia vastaan toimi tavanomaiseen tapaan, koska nollahypoteesin voimassa ollessa GARCH(2,2)-mallin parametrit eivät ole identifioituvia.

- Eri malleja voidaan verrata mallinvalintakriteerejä käyttäen ilman testeissä ilmeneviä tulkintahankaluuksia.
- Kriteerifunktio on normaalisen GARCH(r,s)-mallin tapauksessa

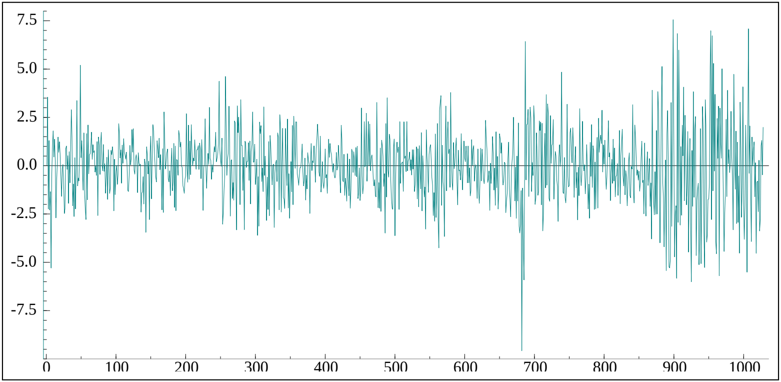
$$C(r,s) = -\frac{2}{T}\tilde{l}(\hat{\delta}) + (r+s+1)\,g(T)/T,$$

jossa sakkofunktio $g(\cdot)$ on positiivinen ja $g(T)/T \to 0$, kun $T \to \infty$. Esimerkiksi

AIC:	$g(T) = 2$	(Akaike, 1974)
HQ:	$g(T) = 2\log(\log T)$	(Hannan ja Quinn, 1979)
BIC:	$g(T) = \log T$	(Schwarz, 1978, Rissanen, 1978).

- t-jakaumaa käytettäessä kriteerifunktio on

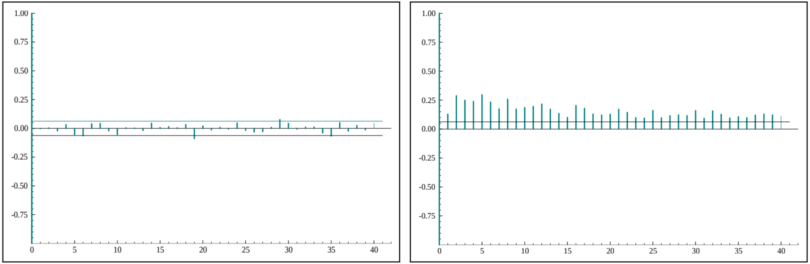
$$C(r,s) = -\frac{2}{T}\tilde{l}(\hat{\delta},\hat{\eta}) + (r+s+1)\,g(T)/T,$$



Kuvio 5.1(i). Frankfurtin pörssin DAX-indeksin päivätuotot ajalta 1.1.1999 - 31.1.2003. Tuotot on laskettu kaavalla $y_t = 100\,(\log P_t - \log P_{t-1})$, jossa P_t on indeksin arvo päivänä t.

Ehdollisen varianssin mallintaminen

Empiirinen esimerkki



Kuvio 5.1(ii). Frankfurtin pörssin DAX-indeksin päivätuotoista ajalta 1.1.1999 - 31.1.2003 laskettu otosautokorrelaatiofunktio (vas.) ja neliöiden otosautokorrelaatiofunktio (oik.) viipymillä $h = 1, ..., 40$.

- Normaalijakaumaan perustuvan GARCH(1,1)-mallin SU-estimointi tuottaa DAX-indeksin päivätuottosarjalle ($T = 1028$) estimoiduksi ehdolliseksi varianssiksi

$$h_t = \underset{\substack{(0.025) \\ [0.023]}}{0.062} + \underset{\substack{(0.020) \\ [0.021]}}{0.887}\, h_{t-1} + \underset{\substack{(0.017) \\ [0.020]}}{0.094}\, y_{t-1}^2, \qquad (5.13)$$

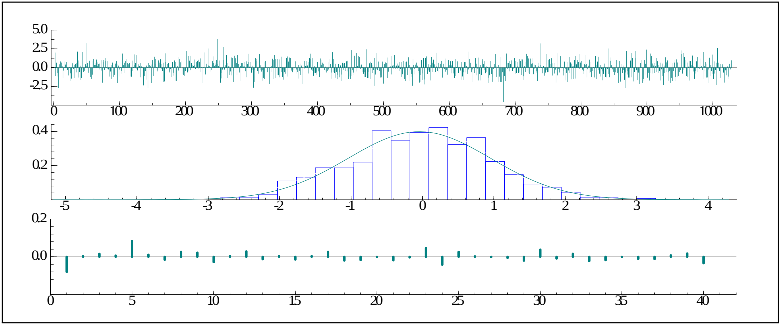
  jossa tavallisissa suluissa on "tavanomaiset" keskivirheet ja hakasuluissa ns. "robustit" keskivirheet.

- $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 0.981$, mikä osoittaa voimakasta riippuvuutta ehdollisessa varianssissa.

- Heikon stationaarisuuden ehto $\hat{\alpha} + \hat{\beta} < 1$ toteutuu kuitenkin.

Ehdollisen varianssin mallintaminen

Empiirinen esimerkki



- DAX-sarjaan sovitetun GARCH(1,1)-mallin (5.13) residuaalisarja (ylh.), sen histogrammi ja $N(0,1)$-jakauman tiheysfunktio (kesk.) sekä neliöityjen residuaalien otosautokorrelaatiofunktio viipymillä $h = 1, ..., 40$ (alh.).
- Neliöityjen residuaalien ensimmäinen ja viides autokorrelaatio ≈ 0.08 $(1.96/\sqrt{1028} \approx 0.06)$.

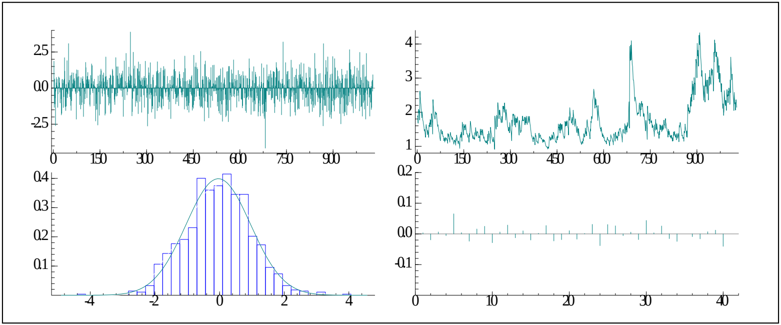
- GARCH(2,1)- ja GARCH(1,2)-malleista osoittautui jälkimmäinen sopivammaksi mm. mallinvalintakriteerien mukaan.
- Normaalijakaumaan perustuvaa SU-estimointi $\Rightarrow$

$$h_t = \underset{\substack{(0.032)\\[0.033]}}{0.086} + \underset{\substack{(0.026)\\[0.032]}}{0.855}\, h_{t-1} - \underset{\substack{(0.029)\\[0.032]}}{0.027}\, y_{t-1}^2 + \underset{\substack{(0.034)\\[0.042]}}{0.146}\, y_{t-2}^2. \tag{5.14}$$

- Tässä $\hat{\alpha}_1 < 0$, mutta estimaatit toteuttavat kuitenkin ehdollisen varianssin positiivisuuden takaavat ehdot $\omega > 0$, $\beta_1 \geq 0$ ja $\beta_1 \alpha_1 + \alpha_2 \geq 0$.
- Heikon stationaarisuuden ehto on (jälleen) niukasti voimassa, sillä polynomin $1 - \hat{\beta}(z) - \hat{\alpha}(z)$ juuret ovat -6.69 ja 1.02.

Ehdollisen varianssin mallintaminen

Empiirinen esimerkki



- DAX-sarjaan sovitetun GARCH(1,2)-mallin (5.14) residuaalisarja (ylh. vas.), sen histogrammi ja $N(0,1)$-jakuman tiheysfunktio (alh. vas.), neliöityjen residuaalien otosautokorrelaatiofunktio viipymillä $h = 1, ..., 40$ (alh. oik.) ja estimoitu ehdollinen hajonta $\hat{h}_t^{1/2}$ (ylh. oik.).
- Neliöityjen residuaalien ensimmäinen autokorrelaatio ≈ 0.003 viides ≈ 0.066 $(1.96/\sqrt{1028} \approx 0.06)$.

- Kun AR(p)-mallin virheen oletetaan oleva ehdollisesti heteroskedastinen, saadaan malli

$$\begin{aligned} y_t &= \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + u_t \\ u_t &= h_t^{1/2}\varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim \text{iid}\,(0,1)\,, \\ h_t &= h_t\,(u_{t-1}, u_{t-2}, \ldots) \text{ ja } \varepsilon_t \perp\!\!\!\perp (y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots) \end{aligned}$$

- Viimeisestä seuraa $\varepsilon_t \perp\!\!\!\perp (u_{t-1}, u_{t-2}, \ldots)$ ja siten $\varepsilon_t \perp\!\!\!\perp h_t$.
- Kertoimien $\phi_1, \ldots, \phi_p$ oletetaan toteuttavan (riittävä) stationaarisuusehto $1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p \neq 0,\ |z| \leq 1$.
- Ehdolliselle varianssille oletetaan GARCH(r,s)-malli

$$h_t = \omega + \beta_1 h_{t-1} + \cdots + \beta_r h_{t-r} + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_s u_{t-s}^2,$$

jonka parametrit toteuttavat identifioituvuusehdon ja (ainakin vahvan) stationaarisuuden vaatiman ehdon.

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + u_t$$

$$u_t = h_t^{1/2} \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim \text{iid}\,(0,1)$$

$$h_t = \omega + \beta_1 h_{t-1} + \cdots + \beta_r h_{t-r} + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_s u_{t-s}^2$$

- Oletuksista saadaan tuloket

$$\mathrm{E}_{t-1}\,(y_t) = \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} \quad \text{ja} \quad \mathrm{Var}_{t-1}\,(y_t) = h_t,$$

jotka osoittavat prosessin ehdollisen odotusarvon ja varianssin riippuvan prosessin menneisyydestä.

- Ongelma: Havaintojen y_{t+k}, $k \geq 1$, arvojen ennustamista ajankohtana t, kun oletetaan stationaarisuus ja $\mathsf{E}(y_t^2) < \infty$.
- Kun $k \geq 2$, nähdään kuten jaksossa 5.7, että

$$\mathsf{E}_t(u_{t+k}) = \mathsf{E}_t\left[\mathsf{E}_{t+k-1}(u_{t+k})\right] = 0,$$

joten (keskineliövirheen mielessä) optimaalinen ennuste toteuttaa

$$\mathsf{E}_t\left(y_{t+k}\right) = \phi_1 \mathsf{E}_t(y_{t+k-1}) + \cdots + \phi_p \mathsf{E}_t(y_{t+k-p}), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

jossa $\mathsf{E}_t(y_{t+k-j}) = y_{t+k-j}$, kun $j \geq k$.

- Siis, ennusteet voidaan muodostaa rekursiivisesti aivan samalla tavalla kuin homoskedastisessa AR(p)-tapauksessa.

- Ennustevirhe

$$y_{t+k} - \mathsf{E}_t(y_{t+k}) = \sum_{j=0}^{k-1} \psi_j u_{t+k-j} = \sum_{j=0}^{k-1} \psi_j h_{t+k-j}^{1/2} \varepsilon_{t+k-j},$$

- Yhden askeleen ennustevirheen ehdolliselle odotusarvolle ja varianssille pätee

$$\mathsf{E}_t \left[y_{t+1} - \mathsf{E}_t(y_{t+1}) \right] = \mathsf{E}_t(u_{t+1}) = 0$$

ja

$$\mathsf{E}_t \left[y_{t+1} - \mathsf{E}_t \left(y_{t+1} \right) \right]^2 = \mathsf{E}_t \left(u_{t+1}^2 \right) = h_{t+1}.$$

- Siis, yhden askeleen ennustevirhe on ehdollisesti heteroskedastinen eli ennustetarkkuus riippuu siitä millaisia arvoja prosessi on saanut ennusteajankohtana ja ennen sitä.
- Ennustevirheen lausekkeesta nähdään, että sama pätee myös ennustettaessa yhtä askelta pidemmälle.

- Jos $\varepsilon_t \sim \text{nid}\,(0,1)$, niin on yhden askeleen ennustevirheelle pätee tulos

$$y_{t+1} - \mathrm{E}_t(y_{t+1})\,|\{y_{t-j}, j \geq 0\} \sim \mathrm{N}\,(0, h_{t+1})\,,$$

  jonka avulla voidaan yhden askeleen ennusteelle muodostaa (ehdollisia) luottamusrajoja aivan kuten homoskedastisessa ARMA-tapauksessa.

- Usean askeleen ennusteiden luottamusrajoja ei kuitenkaan voida muodostaa yhtä helposti, sillä usean askeleen ennustevirheen ehdollinen jakauma ei ole normaalinen eikä sille voida johtaa yksinkertaista esitystä.
- Ehdollisen varianssin ennustaminen sujuu samalla tavalla kuin jaksossa 5.7, jossa $\mathrm{E}_{t-1}\,(y_t) = 0$, kunhan aikaisemmissa tarkasteluissa prosessi y_t korvataan prosessilla $u_t = y_t - \mathrm{E}_t(y_t)$.

- Olettaen $\varepsilon_t \sim \text{nid}\,(0,1)$ voidaan ehdollinen uskottavuusfunktio johtaa käyttäen samaa periaatetta kuin GARCH-malleilla.
- Jos $\mathbf{Y}_{t-1} = (\mathbf{Y}_0, y_1, ..., y_{t-1})$, niin kuten GARCH-malleilla

$$\prod_{t=1}^{T} f_{y_t|\mathbf{Y}_{t-1}} = (2\pi)^{-T/2} \cdot \prod_{t=1}^{T} h_t^{-1/2} \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} \frac{u_t^2}{h_t} \right\},$$

jossa $u_t = y_t - \phi_1 y_{t-1} - \cdots - \phi_p y_{t-p}$.

- Log-uskottavuusfunktioksi saadaan siten

$$\tilde{l}\,(\boldsymbol{\phi}, \delta) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} \log h_t\,(\boldsymbol{\phi}, \delta) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} \frac{u_t\,(\boldsymbol{\phi})^2}{h_t\,(\boldsymbol{\phi}, \delta)},$$

jossa $u_t\,(\boldsymbol{\phi}) = y_t - \phi_1 y_{t-1} - \cdots - \phi_p y_{t-p}$, $\boldsymbol{\phi} = \left(\phi_1, ..., \phi_p\right)$ ja $\delta = (\omega, \alpha_1, .., \alpha_s, \beta_1, ..., \beta_r)$

Jos $\tilde{l}\left(\boldsymbol{\phi}, \delta\right)$ maksimoituu pisteessä $\hat{\boldsymbol{\vartheta}} = \left(\hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\delta}\right)$, pätee ilman normaalisuusoletustakin

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}} \underset{as}{\sim} \mathrm{N}\left(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{V}\left(\boldsymbol{\vartheta}\right)^{-1}\mathbf{B}\left(\boldsymbol{\vartheta}\right)\mathbf{V}\left(\boldsymbol{\vartheta}\right)^{-1}\right),$$

jossa

$$\begin{aligned}\mathbf{V}\left(\boldsymbol{\vartheta}\right) &= \mathrm{E}\left[-\partial^2\tilde{l}(\boldsymbol{\vartheta})/\partial\boldsymbol{\vartheta}\partial\boldsymbol{\vartheta}'\right] \\ \mathbf{B}\left(\boldsymbol{\vartheta}\right) &= \mathrm{E}\left[\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\vartheta}}\tilde{l}_t(\boldsymbol{\vartheta})\right)\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\vartheta}}\tilde{l}_t(\boldsymbol{\vartheta})\right)'\right]\end{aligned}$$

ja $\tilde{l}_t(\boldsymbol{\vartheta})$ havainnon y_t log-uskottavuus eli

$$\tilde{l}_t\left(\boldsymbol{\vartheta}\right) = -\frac{1}{2}\log h_t\left(\boldsymbol{\vartheta}\right) - \frac{u_t\left(\boldsymbol{\vartheta}\right)^2}{2h_t\left(\delta\right)}.$$

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}} \underset{as}{\sim} \mathrm{N}\left(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{V}(\boldsymbol{\vartheta})^{-1}\mathbf{B}(\boldsymbol{\vartheta})\mathbf{V}(\boldsymbol{\vartheta})^{-1}\right)$$

- Normaalisuusoletuksen voimassa ollessa pätee $\mathbf{V}(\boldsymbol{\vartheta}) = \mathbf{B}(\boldsymbol{\vartheta})$, joten keskivirheiden ja Waldin testien lausekkeet yksinkertaistuvat.
- Kuten GARCH-malleilla, voidaan uskottavuusfunktio ja yo tulos johtaa korvaamalla normaalijakauma esimerkiksi t-jakaumalla.

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}} \underset{as}{\sim} \mathrm{N}\left(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{V}\left(\boldsymbol{\vartheta}\right)^{-1}\mathbf{B}\left(\boldsymbol{\vartheta}\right)\mathbf{V}\left(\boldsymbol{\vartheta}\right)^{-1}\right)$$

Käyttäen matriisien $\mathbf{V}\left(\boldsymbol{\vartheta}\right)$ ja $\mathbf{B}\left(\boldsymbol{\vartheta}\right)$ empiirisiä vastineita

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{V}}(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}) &= \left[-\partial^2 \tilde{l}(\hat{\boldsymbol{\vartheta}})/\partial\boldsymbol{\vartheta}\partial\boldsymbol{\vartheta}'\right]^{-1} \quad \text{ja} \\ \hat{\mathbf{B}}(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}) &= \sum_{t=1}^{T}\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\vartheta}}\tilde{l}_t(\hat{\boldsymbol{\vartheta}})\right)\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\vartheta}}\tilde{l}_t(\hat{\boldsymbol{\vartheta}})\right)' \end{aligned}$$

voidaan estimaattorin $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$ asymptoottista jakaumaa käyttää likimääräisten keskivirheiden ja parametria $\boldsymbol{\vartheta}$ koskevien Waldin testien konstruoimiseen.

Ehdollisen varianssin mallintaminen

Empiirinen esimerkki

- USAn neljännesvuosittainen inflaatiosarja, jolle estimoitiin jaksossa 4.4 normaalijakaumaan perustuva AR(3)-malli, jonka residuaalien neliöissä havaittiin viitteitä autokorrelaatiosta.
- Normaalijakaumaan perustuva AR(3)-GARCH(1,1)-malli ($\bar{y}_t = y_t - 4.56$):

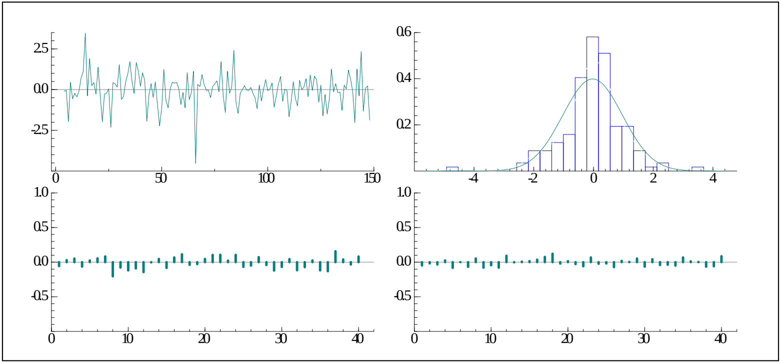
$$\bar{y}_t = \underset{\substack{(0.088)\\ [0.077]}}{0.396}\,\bar{y}_{t-1} + \underset{\substack{(0.102)\\ [0.158]}}{0.278}\,\bar{y}_{t-2} + \underset{\substack{(0.092)\\ [0.128]}}{0.265}\,\bar{y}_{t-1} + u_t$$

$$h_t = \underset{\substack{(0.240)\\ [0.254]}}{0.419} + \underset{\substack{(0.094)\\ [0.135]}}{0.489}\,h_{t-1} + \underset{\substack{(0.232)\\ [0.418]}}{0.654}\,u_{t-1}^2$$

- $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 1.14 \Rightarrow$ heikon stationaarisuuden ehto ei voimassa.
- $\mathrm{E}\left[\log\left(\beta + \alpha\varepsilon_t^2\right)\right] < 0 \Rightarrow$ vahvan stationaarisuuden ehto toteutuu.

Ehdollisen varianssin mallintaminen

Empiirinen esimerkki: Normaalinen innovaatio



- Inflaatiosarjaan sovitetusta AR(1)-GARCH(1,1)-mallista laskettu residuaalisarja (ylh. vas.), sen histogrammi ja $\mathrm{N}(0,1)$-jakauman tiheysfunktio (ylh. oik.) sekä residuaalien ja neliöityjen residuaalien otosautokorrelaatiofunktiot viipymillä $h = 1, ..., 40$ (alh. vas. ja oik.).

Ehdollisen varianssin mallintaminen

Empiirinen esimerkki: t-jakautunut innovaatio

- t-jakaumaan perustuva AR(3)-GARCH(1,1)-malli (η vapausasteparametri):

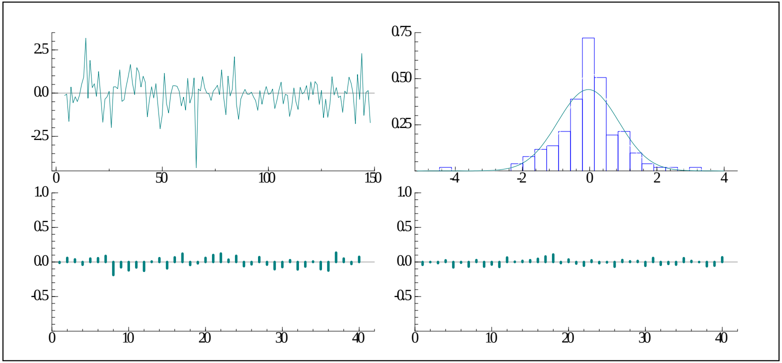
$$\bar{y}_t = \underset{\substack{(0.089)\\ [0.099]}}{0.316}\,\bar{y}_{t-1} + \underset{\substack{(0.085)\\ [0.091]}}{0.262}\,\bar{y}_{t-2} + \underset{\substack{(0.080)\\ [0.087]}}{0.311}\,\bar{y}_{t-1} + u_t$$

$$h_t = \underset{\substack{(0.524)\\ [0.589]}}{0.635} + \underset{\substack{(0.137)\\ [0.142]}}{0.537}\,h_{t-1} + \underset{\substack{(0.378)\\ [0.388]}}{0.610}\,u_{t-1}^2, \qquad \hat{\eta} = 3.140,$$

- Estimaateissa ei ole kovin suurta eroa verrattuna normaalisen mallin estimaatteihin.
- GARCH-parametrien estimaatit toteuttavat vahvan stationaarisuuden ehdon, mutta eivät heikoin stationaarisuuden ehtoa.
- Residuaalikuvat silmämääräisesti hyvin samanlaisia kuin normaalisessa mallissa.

Ehdollisen varianssin mallintaminen

Empiirinen esimerkki: t-jakautunut innovaatio



- Inflaatiosarjaan sovitetusta AR(1)-GARCH(1,1)-mallista laskettu residuaalisarja (ylh. vas.), sen histogrammi ja $\mathrm{N}(0,1)$-jakauman tiheysfunktio (ylh. oik.) sekä residuaalien ja neliöityjen residuaalien otosautokorrelaatiofunktiot viipymillä $h = 1, ..., 40$ (alh. vas. ja oik.).