Stationaariset aikasarjat sl 2015, HT 8, viikko 47

1. Tarkastellaan monisteen yhtälössä (5.1) esitettyä yleistä ehdollisesti heteroskedastista prosessia $y_t = h_t^{1/2}\varepsilon_t$, jossa $\varepsilon_t \sim \mathsf{iid}\,(0,1)$, h_t on positiivinen funktio muuttujista y_{t-j}, $j > 0$, ja ε_t on riippumaton muuttujista y_{t-j}, $j > 0$. Oletetaan lisäksi, että y_t on stationaarinen ja $\mathsf{E}\left(y_t^2\right) < \infty$. Osoita monisteen yhtälössä (5.3) mainittu tulos $\mathsf{Cov}\,(y_t, y_{t-k}) = 0$ kaikilla $k > 0$ eli että y_t on autokorreloimaton.

2. Tarkastellaan ARCH(1)-prosessia $y_t = h_t^{1/2}\varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim \mathsf{iid}\,(0,1)$, $h_t = \omega + \alpha y_{t-1}^2$, $\omega > 0$, $0 \leq \alpha < 1$. Kuten monisteessa on todettu, pätee tällöin $\mathsf{E}_{t-1}\,(y_t) = 0$ ja $\mathsf{Var}_{t-1}\,(y_t) = \mathsf{E}_{t-1}\left(y_t^2\right) = h_t$. Oletetaan nyt, että prosessista y_t havaitaan vain joka toinen arvo ja määritellään edellä mainitut ehdolliset momentit ehdollistaen muuttujien $y_{t-2}, y_{t-4}, ...$ eikä muuttujien $y_{t-1}, y_{t-2}, ...$ suhteen. Osoita, että

(i) $\mathsf{E}\,(y_t \mid y_{t-2}, y_{t-4}, ...) = 0$ ja (ii) $\mathsf{Var}\,(y_t \mid y_{t-2}, y_{t-4}, ...) = \omega\,(1+\alpha) + \alpha^2 y_{t-2}^2$.

Vihje: Kohdassa (i) voit käyttää monisteen s. 34 esitetyn iteroidun odotusarvon lain (EO3) yleistystä, jonka mukaan $\mathsf{E}\,(Y \mid X_2) = \mathsf{E}\,[\mathsf{E}\,(Y \mid X_1) \mid X_2]$, kun (mahdollisesti ääretönulotteisen) vektorin X_2 komponentit muodostavat X_1:n komponenttien osajoukon (tai yleisemmin X_2 on X_1:n funktio). Kohdan (ii) voi ratkaista muokkaamalla ensin yhtälöä $y_t = h_t^{1/2}\varepsilon_t = \left(\omega + \alpha y_{t-1}^2\right)^{1/2}\varepsilon_t$ niin, että y_t:n riippuvuus y_{t-2}:sta tulee eksplisiittiseksi ja laskemalla tämän jälkeen ehdollinen varianssi.

Huom.: Tulos yleistyy siten, että jos prosessista y_t havaitaan joka m. arvo, niin $\mathsf{Var}\,(y_t \mid y_{t-m}, y_{t-2m}, ...) = \omega\,(1-\alpha^m)\,/\,(1-\alpha) + \alpha^m y_{t-m}^2$, joten ehdollinen heteroskedastisuus heikkenee, kun havainnointitiheys harvenee. Näin on havaittu käyvän empiirisillä aikasarjoilla.

Seuraavat tehtävät on tarkoitus ratkaista käyttäen kurssisivulta löytyvää R-koodia (R-koodi_2) ja aineistoja Treasury ja Exchange käyttäen.

3. Sarja Treasury on USAn valtion 10 vuoden kiinteäkorkoisten arvopapereiden keskimääräinen kuukausikorko ajanjaksolta 1970I-2014XII. Osaketuottojen ja valuuttakurssien tapaan myös korkosarjoissa tai niistä muodostetuissa tuottosarjoissa voi olla ehdollista heteroskedastisuutta, mutta ne voivat toisaalta olla autokorreloituneita etenkin, kun niitä on havainnoitu kuukausittain (tai harvemmin). Rakenna ARMA(p,q)-malli Treasury-sarjasta muodostetulle tuottosarjalle.

(i) Käyttäen logaritmoitua ja differensoitua sarjaa valitse sopivilta tuntuvat asteet p ja q.

(ii) Estimoi valitsemasi mallin parametrit SU-menetelmällä ja tutki estimoimasi mallin riittävyyttä monisteen jaksossa 4.5 esitettyjä menetelmiä käyttäen kiinnittäen erityisesti huomiota residuaalien mahdolliseen ehdolliseen heteroskedastisuuteen.

4. Sarja Exchange on USAn dollarin ja Englannin punnan välinen kuukausittainen vaihtokurssi ajanjaksolta 1971I-2014XII. Kuten edellisessä tehtävässä vihjattiin, voidaan tästä sarjasta muodostetussa tuottosarjassa epäillä olevan ehdollista heteroskedastisuutta. Rakenna ARMA(p,q)-malli Exchange-sarjasta muodostetulle tuottosarjalle.

(i) Käyttäen logaritmoitua ja differensoitua sarjaa valitse sopivilta tuntuvat asteet p ja q.

(ii) Estimoi valitsemasi mallin parametrit SU-menetelmällä ja tutki estimoimasi mallin riittävyyttä monisteen jaksossa 4.5 esitettyjä menetelmiä käyttäen kiinnittäen erityisesti huomiota residuaalien mahdolliseen ehdolliseen heteroskedastisuuteen.