**Stationaariset aikasarjat sl 2015, HT 2, viikko 38**

**1.** Olkoon $x_t$ ja $z_t$ kaksi heikosti stationaarista prosessia, jotka ovat korreloimattomia eli $\mathsf{Cov}\,(x_s, z_t) = 0$ kaikilla $t, s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ . Osoita, että summa $x_t + z_t$ on heikosti stationaarinen ja sen autokovarianssifunktio on prosessien $x_t$ ja $z_t$ autokovarianssifunktioiden summa.

**2.** Tarkastellaan ei-kausaalista AR(1)-prosessia $y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t,\ \varepsilon_t \sim \mathsf{iid}\left(0, \sigma^2\right)$, jossa $|\phi| > 1$.

(i) Johda prosessin $y_t$ autokovarianssifunktio.

(ii) Totea edellisen kohdan tuloksen avulla, että tehtävän ei-kausaalisella AR(1)-prosessilla ja kausaalisella AR(1)-prosessilla $y_t = \phi^{-1} y_{t-1} + \phi^{-1}\varepsilon_t,\ \ \varepsilon_t \sim \mathsf{iid}\left(0, \sigma^2\right)$, $|\phi| > 1$, on sama autokorrelaatiofunktio.

*Vihje*: Voit käyttää kohdassa (i) monisteen s. 16 todettua tulosta, jonka mukaan $y_t$:llä on lineaarinen esitys $y_t = -\sum_{j=1}^{\infty} \phi^{-j} \varepsilon_{t+j}$, ja monisteen s. 13 johdettua yleisen lineaarisen prosessin autokovarianssifunktion lauseketta.

*Huom.*: Tehtävä osoittaa, ettei autokorrelaatiofunktion avulla voida päätellä toteuttaako havainnot tuottaneen (stationaarisen) AR(1)-prosessin parametri ehdon $|\phi| < 1$ vai $|\phi| > 1$ (vrt. HT 1.4:n vastaavanlainen MA(1)-prosessia koskeva tulos)

**3.** Tarkastellaan stationaarista ARMA(1,1)-prosessia $y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1},\ \ \varepsilon_t \sim \mathsf{iid}\left(0, \sigma^2\right),\ |\phi| < 1$. Esitä $y_t$:n MA($\infty$)-esityksen suotimen $\psi\,(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j = (1 + \theta B)\,/\,(1 - \phi B)$ kertoimet $\psi_j$ parametrien $\phi$ ja $\theta$ funktioina. Mitä tapahtuu kertoimille $\psi_j$ ja prosessin $y_t$ autokovarianssifunktiolle, kun $\phi = -\theta$?

*Vihje*: Kirjoita yhtälö $\psi\,(B) = (1 + \theta B)\,/\,(1 - \phi B)$ "sopivasti" vaihtoehtoisella tavalla ja käytä hyväksesi tietoa, että kaksi potenssisarjaa on samoja, jos niiden kaikki kertoimet ovat samoja.

**4.** Tarkastellaan satunnaiskulkua $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t,\ t = 1, 2, \ldots$, jossa $\varepsilon_t \sim \mathsf{iid}\left(0, \sigma^2\right)$ ja (yksinkertaisuuden vuoksi) $y_0 = 0$ (ks. monisteen s. 16). Totea, että

$$\bar{y} = T^{-1} \sum_{t=1}^{T} y_t = T^{-1} \sum_{t=1}^{T} (T - t + 1)\,\varepsilon_t$$

ja osoita tämän avulla tulokset $\mathsf{E}\,(\bar{y}) = 0$ ja $\mathsf{Var}\,(\bar{y}) \to \infty$, kun $T \to \infty$. Päättele tästä edelleen, että otoskeskiarvo $\bar{y}$ ei estimoi havaintojen odotusarvoa ($= 0$) tarkentuvasti. (Viimeisessä kohdassa ei vaadita tarkkaa matemaattista todistusta.)

*Huom.*: Tämä tehtävä osoittaa, että tavanomainen suurten lukujen laki ei päde satunnaiskulun tapauksessa, mikä on yksi syy sille, että satunnaiskulun kaltaiset epästationaariset prosessit vaativat oman teoriansa (vrt. otoskeskiarvon tarkentuvuus jakson 2.4 stationaarisessa tapauksessa).