Riskiteorian laskuharjoitus 6, 26.10.2015

1. Kokonaisvahinkomäärä X noudattaa yhdistettyä painotettua Poisson-jakaumaa. Vahinkojen lukumäärän odotusarvo on $\lambda = 2$ ja struktuurimuuttujan Q jakauma $\mathbb{P}(Q = 0.9) = \mathbb{P}(Q = 1.1) = 0.5$. Tuota simuloimalla yksi havainto X:n jakaumasta allaolevien satunnaislukujen avulla, kun yksittäiset vahingot ovat eksponenttijakautuneita parametrilla $\mu = 1$.

Riippumattomia T(0,1)-jakautuneita satunnaislukuja:

0.425, 0.551, 0.388, 0.500, 0.441, 0.611, 0.490, 0.620, 0.552, 0.392, 0.701, 0.521, 0.590, 0.641

2. Määrää gamma-(r, a)-jakauman kaikki konjugaattijakaumat.

3. Kokonaisvahinkomäärällä X on yhdistetty Poisson-jakauma parametrilla (λ, S), missä S on eksponenttijakauman kertymäfunktio parametrilla μ, $S(z) = 1 - e^{-\mu z}$ alueessa $z > 0$. Olkoon X:n kumulantit generoiva funktio c. Osoita, että

$$c^*(v) = \mu v + \lambda - 2\sqrt{v\mu\lambda}$$

alueessa $v > 0$.

4. (jatkoa) Yhtiöllä on vuoden alussa alkupääoma U_0 ja vuotuinen vakuutusmaksu on P. Osoita, että yhtiön vararikkotodennäköisyys vuoden aikajänteellä on tason ε alapuolella. Parametreilla on arvot $\lambda = 100, \mu = 1, P = 120$, $U_0 = 30$ ja $\varepsilon = 0.01$.

5. Olkoot $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia ja

$$S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n, \ n \in \mathbb{N}.$$

Olkoon c_ξ muuttujan ξ kumulantit generoiva funktio. Oletetaan, että c_ξ on äärellinen eräässä origon ympäristössä. Olkoon $a > 0$ kiinteä ja $\mu_\xi = \mathbb{E}(\xi) > 0$. Oletetaan, että $c_\xi'(t) = (1+a)\mu_\xi$ eräälle $t \in \mathbb{R}$. Osoita, että

$$\mathbb{P}\left(S_n \geq n(1+a)\mu_\xi\right) \leq \left(\frac{1}{2} + o(1)\right) e^{-nc_\xi^*((1+a)\mu_\xi)},$$

missä $o(1) \to 0$, kun $n \to \infty$.

Vihje: käytä luentojen esitystä (6.3.3.3).