Riskiteorian laskuharjoitus 4, 5.10.2015

1. Olkoon vahingon suuruden kertymäfunktio S ja

$$\bar{S}(z) = 1 - S(z) = \left(\sqrt{z} + c\log z\right)^{-a}, \quad \forall z \geq z_0,$$

missä c, a ja z_0 ovat positiivisia vakioita. Osoita, että $\bar{S}$ on säännöllisesti vaihteleva. Mikä on jakauman hännän vahvuutta kuvaava lemman 5.1 momentti-indeksi β_S.

2. Olkoon ξ satunnaismuuttuja, jolle

$$\bar{\xi} = \sup\{y \in \mathbb{R} : P(\xi > y) > 0\} < \infty.$$

Osoita, että satunnaismuuttujan ξ kumulantit generoivalle funktiolle c_ξ pätee

$$\lim_{s\to\infty} \frac{c_\xi(s)}{s} = \bar{\xi}.$$

3. Olkoon X yhdistettyä Poisson-jakaumaa noudattava satunnaismuuttuja ja edustakoon Z yksittäisen vahingon suuruutta. Oletetaan, että Z on rajoitettu siten, että

$$\mathbb{P}(Z \in [0, M]) = 1,$$

missä $M > 0$ on vakio. Olkoon $\mu = \mathbb{E}(X)$ ja $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$. Mitataan muuttujan X vaarallisuutta suhteellisella hajonnalla $s = \sigma/\mu$. Osoita, että

$$(*) \qquad s \leq \sqrt{M/\mu}.$$

4. (jatkoa) Olkoon $m \in (0, M]$ kiinteä. Konstruoi sellainen välille $[0, M]$ keskittyvä yksittäisen vahingon suuruusjakauma, että $(*)$ toteutuu yhtälönä ja $\mathbb{E}(Z) = m$.

5. Osoita, että Eulerin gammafunktiolle pätee

$$\Gamma(r) = (r-1)\Gamma(r-1) \qquad (*)$$

alueessa $r > 1$.

Olkoon K Polya-muuttuja ts. painotettu Poisson-muuttuja, jonka struktuurimuuttujalla on gamma-jakauma. Todista $(*)$:n avulla, että pistetodennäköisyydet $p_k = \mathbb{P}(K = k)$ toteuttavat rekursiokaavan

$$p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}, \;\; k = 1, 2, \ldots$$

missä a ja b ovat sopivia vakioita.