Riskiteoria 28.1.2016
Erilliskoe 4h

1. Olkoon X_i yhdistettyä painotettua Poisson-jakaumaa noudattava satunnaismuuttuja parametrilla (λ_i, Q_i, S), $i = 1, 2$. Oletetaan, että X_1 ja X_2 ovat riippumattomia. Osoita, että $X_1 + X_2$ noudattaa yhdistettyä painotettua Poisson-jakaumaa.

2. Yhtiön alkupääoma on U_0, tulevan vuoden kokonaisvahinkomäärä X noudattaa yhdistettyä Poisson-jakaumaa ja vakuutusmaksu on $P = 1.1\mathbb{E}(X)$. Olkoon Poisson-parametri λ ja yksittäiset vahingot välille $(0, 1)$ tasan jakautuneita satunnaismuuttujia. Yhtiön sallitaan jatkaa toimintaansa, jos vararikkotodennäköisyys vuoden aikajänteellä on korkeintaan 0.01. Osoita, että yhtiö ei täytä mainittua vakavaraisuusvaatimusta.

Yhtiö ottaa koko vakuutuskantaa koskevan fransiisijälleenvakuutuksen omavastuurajana M. Tällöin jälleenvakuuttaja maksaa jokaisesta vahingosta Z määrän $Z^{jv} = Z\mathbf{1}(Z > M)$. Jälleenvakuutusmaksu on $P^{jv} = 1.1\mathbb{E}(X^{jv})$, missä X^{jv} on jälleenvakuuttajan vastuulla oleva osa kokonaisvahinkomäärästä. Osoita, että yhtiö täyttää mainitun vakavaraisuusvaatimuksen omalla vastuulla olevan liikkeen osalta, jos $M = 1/2$.

Parametreilla on arvot $U_0 = 8$ ja $\lambda = 200$. Tehtävässä voidaan soveltaa normaaliapproksimaatiota yhdistettyyn Poisson-jakaumaan ($\phi(2.33) = 0.99$, missä ϕ on standardi normaalijakauman kertymäfunktio).

3. Vahinkoja sattuu Poisson-prosessin mukaisesti intensiteetifunktiolla $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$, missä $\lambda(t) = \lambda(1+g)^t$ ja λ ja g ovat positiivisia vakioita. Oletetaan, että vahinkojen raportoitumisviiveet ovat toisistaan ja lukumääräprosessista riippumattomia eksponenttijakautuneita satunnaismuuttujia odotusarvona 1. Yksittäisen vahingon suuruus on vakio $a > 0$ ja korvaus maksetaan aina kokonaisuudessaan heti, kun vahinko raportoituu yhtiöön.

Ensimmäisen toimintavuoden lopussa on raportoitunut N vahinkoa. Määrää tähän havaintoon perustuva korvausvastuun ehdollinen odotusarvo hetkellä yksi.

4. Yhtiön vuosien $1, 2, \ldots$ tappiot $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia. Olkoon näiden yhteinen kumulantit generoiva funktio c äärellinen kaikkialla ja $\lim_{s\to\infty} c'(s) = \infty$. Oletetaan, että yhtälöllä $c(s) = 0$ on yksikäsitteinen positiivinen juuri R. Olkoon $U_0 > 0$ yhtiön alkupääoma ja T vararikkohetki sekä $0 < y < x < 1/c'(R)$. Osoita, että

$$\lim_{U_0\to\infty} U_0^{-1} \log \mathbb{P}\left(\frac{T}{U_0} \in [y, x]\right) = -xc^*(1/x).$$

Riskiteoria 28.1.-16

1. Harj. 3, teht. 5

2. $$\begin{cases} \mathbb{E}(Z) = \int_0^1 z\,dz = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{E}(Z^2) = \frac{1}{3} \\ \mathbb{E}(X) = 100, \quad \operatorname{Var} X = \frac{200}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X > u_0 + P) = \mathbb{P}\left(\frac{X - 100}{\sqrt{200/3}} > \frac{u_0 + 10}{\sqrt{200/3}} \right) \\ \approx 1 - \Phi(2.21) > 0.01. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{vv:n jälkeen} \quad \mathbb{E}(Z^{ov}) = \int_0^M z\,dz = \frac{M^2}{2}, \quad \mathbb{E}((Z^{ov})^2) = \frac{M^3}{3} \\ \mathbb{E}(X^{ov}) = \frac{200M^3}{2}, \quad \operatorname{Var} X^{ov} = \frac{200M^3}{3} \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(X^{ov} > u_0 + P^{ov}) = \mathbb{P}\left(\frac{X^{ov} - 100M^3}{\sqrt{200M^3/3}} > \frac{u_0 + 0.1 \cdot 100M^2}{\sqrt{200M^3/3}} \right)$$

$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{u_0 + 10M^2}{\sqrt{200M^3/3}} \right) \approx 1 - \Phi(3.64) < 0.01.$$

3. Korvausvastuu on a. Poisson-jakautunut sen parametrilla

$$\lambda_1 =: \int_0^1 \lambda(s)(1 - G(1-s))\,ds, \qquad G(s) = 1 - e^{-s}$$

$$= \int_0^1 \lambda(1+g)^s e^{-(1-s)}\,ds$$

$$= \lambda e^{-1} \Big/_0^1 \frac{(1+g)^s e^s}{(1+\log(1+g))} = \frac{\lambda}{e(1+\log(1+g))}\left((1+g)e - 1\right).$$

Kysytty ehdollinen odotusarvo $a\lambda_1$, sillä korvausvastuu on riippumaton raportoiduista vahingoista.

4. $$\mathbb{P}\left(\frac{T}{u_0} \in [y, x]\right) = \mathbb{P}(T \le x u_0)\left[1 - \frac{\mathbb{P}(T < y u_0)}{\mathbb{P}(T \le x u_0)}\right].$$

Koska $$\lim_{u_0 \to \infty} u_0^{-1} \log \frac{\mathbb{P}(T < y u_0)}{\mathbb{P}(T \le x u_0)} = -y c^*\left(\tfrac{1}{y}\right) + x c^*\left(\tfrac{1}{x}\right) < 0,$$

on $\mathbb{P}\left(\frac{T}{u_0} \in [y, x]\right) = (1 + o(1))\, \mathbb{P}(T \le x u_0)$, josta väite.