**Riskiteoria 21.12.2015**
**Erilliskoe**

1. Olkoot $\{K(t); t \geq 0\}$ vahinkojen sattumista kuvaava laskuriprosessi. Oletetaan, että prosessin lisäykset ovat riippumattomia ja että $K(t)$ on Poisson-jakautunut parametrilla $\Lambda(t)$ kaikilla $t > 0$, missä $\Lambda : (0, \infty) \to (0, \infty)$ on positiivinen aidosti kasvava funktio. Osoita, että $K(u) - K(t)$ on Poisson-jakautunut kaikilla $u > t \geq 0$.

2. Yhtiön alkupääoma on $U_0$, tulevan vuoden kokonaisvahinkomäärä $X$ noudattaa yhdistettyä Poisson-jakaumaa ja vakuutusmaksu on $P = 1.1\mathbb{E}(X)$. Olkoon Poisson-parametri $\lambda$ ja yksittäiset vahingot eksponenttijakautuneita parametrina $\mu$. Yhtiön sallitaan jatkaa toimintaansa, jos vararikkotodennäköisyys vuoden aikajänteellä on korkeintaan 0.01. Osoita, että yhtiö ei täytä mainittua vakavaraisuusvaatimusta.

Yhtiö ottaa koko vakuutuskantaa koskevan XL-jälleenvakuutuksen omavastuurajana $M$. Jälleenvakuutusmaksu on $P^{jv} = 1.1\mathbb{E}(X^{jv})$, missä $X^{jv}$ on jälleenvakuuttajan vastuulla oleva osa kokonaisvahinkomäärästä. Osoita, että yhtiö täyttää mainitun vakavaraisuusvaatimuksen omalla vastuulla olevan liikkeen osalta, kun $M = 1$.

Parametreilla on arvot $U_0 = 20$, $\lambda = 200$ ja $\mu = 1$. Tehtävässä voidaan soveltaa normaaliapproksimaatiota yhdistettyyn Poisson-jakaumaan ($\phi(2.33) = 0.99$, missä $\phi$ on standardi normaalijakauman kertymäfunktio).

3. Vahinkoja sattuu Poisson-prosessin mukaisesti intensiteetifunktiolla $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$, missä

$$\lambda(t) = \lambda + \varepsilon \sin(2\pi t)$$

ja $0 < \varepsilon < \lambda$ ovat vakioita. Vahinkojen raportoitumisviiveet ovat toisistaan ja lukumääräprosessista riippumattomia välille $(0, 1)$ tasan jakautuneita satunnaismuuttujia. Yksittäisen vahingon suuruus on vakio ($= 1$) ja korvaus maksetaan aina kokonaisuudessaan heti, kun vahinko raportoituu yhtiöön. Yhtiö on aloittanut toimintansa hetkellä 0. Hetkellä 1 havaitaan $\lambda$ raportoitunutta vahinkoa. Määrää tähän havaintoon perustuva korvausvastuun ehdollinen odotusarvo hetkellä 1.

4. Yhtiön vuosien $1, 2, \ldots$ tappiot ovat riippumattomia $N(\mu, \sigma)$ – jakautuneita satunnaismuuttujia, missä $\mu \in (-\infty, 0)$ ja $\sigma \in (0, \infty)$. Yhtiöllä on vuoden 1 alussa käytettävissään alkupääoma $U_0 > 0$. Olkoon $T$ vararikkohetki ja $x \in (0, -1/\mu)$. Osoita, että

$$\mathbb{P}(T \leq xU_0) \leq e^{-(1-\mu x)^2 U_0/(2x\sigma^2)}.$$

(Ohje: $N(\mu, \sigma)$ – jakauman kumulantit generoiva funktio $c$ määräytyy yhtälöstä $c(t) = \mu t + \sigma^2 t^2/2$, $\forall t \in \mathbb{R}$.)

Riskiteoria 21.12.-15

1. $\mathbb{E}(e^{sK(u)}) = \mathbb{E}(e^{s(K(u)-K(t))})\,\mathbb{E}(e^{sK(t)})$

$\Rightarrow \mathbb{E}(e^{s(K(u)-K(t))}) = e^{\Lambda(u)(e^s-1)}\, e^{-\Lambda(t)(e^s-1)}$

$= e^{(\Lambda(u)-\Lambda(t))(e^s-1)}$ $\sim$ Poisson $-(\Lambda(u)-\Lambda(t))$.

2. $\mathbb{E}(Z)=1,\ \mathbb{E}(Z^2)=2 \Rightarrow \mathbb{E}(X) = \lambda\mathbb{E}(Z) = 200,\ \mathrm{Var}\,X = \lambda\mathbb{E}(Z^2) = 400$

$\mathbb{P}(X > P+U_0) \approx 1-\phi\left(\frac{P+U_0-\mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}\,X}}\right) = 1-\phi(2) > 1-\phi(2.33) \doteq 0.01.$

Jos XL-raja on M, on

$$\mathbb{E}(e^{sZ^{ov}}) = \int_0^M e^{-z+sz}dz + e^{-M}e^{sM}$$

$$= \frac{1-e^{(s-1)M}}{1-s} + e^{(s-1)M}$$

Derivoimalla saadaan

$\mathbb{E}(Z^{ov}) = 1-e^{-M}$, $\mathbb{E}((Z^{ov})^2) = 2-2e^{-M}-2Me^{-M}$

$P^{jv} = 1.1\lambda\left(\mathbb{E}(Z)-\mathbb{E}(Z^{ov})\right) = 1.1\lambda e^{-M}$

$\mathbb{P}(X^{ov} > U_0 + P - P^{jv})$

$$\approx 1-\phi\left(\frac{U_0+P-P^{jv}-\mathbb{E}(X^{ov})}{\sqrt{\mathrm{Var}\,X^{ov}}}\right)$$

$$= 1-\phi\left(\frac{U_0+0.1\,\mathbb{E}(X^{ov})}{\sqrt{\mathrm{Var}\,X^{ov}}}\right)$$

$$= 1-\phi\left(\frac{U_0+0.1\lambda(1-e^{-M})}{\sqrt{\lambda(2-2e^{-M}-2Me^{-M})}}\right) \overset{M=1}{\approx} 1-\phi(3.12) < 0.01.$$

3. Korvausasteen odotusarvo on $\frac{\lambda}{2} - \frac{\varepsilon}{2\pi}$,
(Harj. 9, teht. 6).
Tämä on samalla ehdollinen odotusarvo,
koska raportoitumisprosessi on Poisson-prosessi
(lisäykset riippumattomia).

4. $c(t) = 0 \iff t = 0$ tai $t = -\frac{2\mu}{\sigma^2}$. Siis

$R = -\frac{2\mu}{\sigma^2}$ ja $c'(R) = \mu + \sigma^2 t\,\big|_{t=R} = -\mu$.

Jos $x < -\frac{1}{\mu}$, niin

$$\begin{cases} c'(t) = \frac{1}{x}, & \text{kun} \\ t = t_x = \frac{1-\mu x}{x\sigma^2} \end{cases}$$

Tällöin $(x > 0)$

$$\mathbb{P}(T \le x U_0) \le e^{-x c^*(\frac{1}{x}) U_0} \qquad \text{(Lause 9.1.2)}.$$

Nyt

$$x\, c^*\left(\frac{1}{x}\right) = x\left(\frac{t_x}{x} - c(t_x)\right) = \frac{1-\mu x}{x\sigma^2} - \frac{x\mu(1-\mu x)}{x\sigma^2} - \frac{x\sigma^2}{2}\,\frac{(1-\mu x)^2}{x^2\sigma^4}$$

$$= \frac{(1-\mu x)^2}{x\sigma^2} - \frac{(1-\mu x)^2}{2x\sigma^2} = \frac{(1-\mu x)^2}{2x\sigma^2}.$$