Riskiteoria 10.12.2015
Erilliskoe

1. Olkoot K_1 ja K_2 lukumäärämuuttujia. Oletetaan, että K_1 noudattaa painotettua Poisson-jakaumaa parametrilla (λ_1, Q) ja että K_2 on Poisson-jakautunut parametrilla λ_2. Oletetaan lisäksi, että K_1 ja K_2 ovat riippumattomia. Osoita, että $K_1 + K_2$ noudattaa painotettua Poisson-jakaumaa.

2. Yhtiön alkupääoma on U_0, tulevan vuoden kokonaisvahinkomäärä X noudattaa yhdistettyä Poisson-jakaumaa ja vakuutusmaksu on $P = 1.1\mathbb{E}(X)$. Olkoon Poisson-parametri λ ja yksittäiset vahingot eksponenttijakautuneita parametrina μ. Yhtiön sallitaan jatkaa toimintaansa, jos vararikkotodennäköisyys vuoden aikajänteellä on korkeintaan 0.01. Osoita, että yhtiö ei täytä mainittua vakavaraisuusvaatimusta.

Yhtiö ottaa koko vakuutuskantaa koskevan SL-jälleenvakuutuksen omavastuurajana M. Jälleenvakuutusmaksu on $P^{jv}(M)$, missä $P^{jv} : (0, \infty) \to (0, \infty)$ on vähenevä funktio. Osoita, että yhtiö täyttää mainitun vakavaraisuusvaatimuksen omalla vastuulla olevan liikkeen osalta, jos ja vain jos

$$M \leq U_0 + P - P^{jv}(M).$$

Parametreilla on arvot $U_0 = 20$, $\lambda = 200$ ja $\mu = 1$. Tehtävässä voidaan soveltaa normaaliapproksimaatiota yhdistettyyn Poisson-jakaumaan ($\phi(2.33) = 0.99$, missä ϕ on standardi normaalijakauman kertymäfunktio).

3. Yhtiö aloittaa toimintansa hetkellä 0 ja toimii vain yhden vuoden. Vahinkoja sattuu Poisson-prosessin mukaisesti intensiteetifunktiolla $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$, missä

$$\lambda(t) = \begin{cases} \lambda_1, & \text{kun } t \in [0, 1/2], \\ \lambda_2, & \text{kun } t \in (1/2, 1], \end{cases}$$

ja λ_1 ja λ_2 ovat positiivisia vakioita. Vahinkojen raportoitumisviiveet ovat toisistaan ja lukumääräprosessista riippumattomia välille $(0, 1)$ tasan jakautuneita satunnaismuuttujia. Yksittäisen vahingon suuruus on vakio ($= 1$) ja korvaus maksetaan aina kokonaisuudessaan heti, kun vahinko raportoituu yhtiöön.

Yhtiö voi hankkiutua eroon korvausvastuustaan hetkellä 1 maksamalla markkinoilla toimivalle toiselle yhtiölle summan

$$P = \mathbb{E}(X) + v\text{Var}(X),$$

missä X on korvausvastuu hetkellä 1 ja $v > 0$ on vakio. Määrää P.

4. Olkoon vuotuinen kokonaisvahinkomäärä X yhdistettyä Poisson-jakaumaa noudattava satunnaismuuttuja. Vahinkojen lukumäärän odotusarvo on λ ja yksittäisen vahingon suuruus vakio a. Oletetaan, että eri vuosien kokonaisvahinkomäärät ovat toisistaan riippumattomia. Vuotuinen vakuutusmaksu olkoon P. Yhtiöllä on vuoden 1 alussa alkupääoma U_0. Olkoon T vararikkohetki. Yhtiön sallitaan jatkaa toimintaansa, mikäli $\mathbb{P}(T < \infty) \leq 0.01$. Osoita, että yhtiö täyttää mainitun vakavaraisuusvaatimuksen, kun parametreilla on arvot

$$\lambda = 10, \quad a = 2, \quad P = 23 \quad \text{ja} \quad U_0 = 50.$$

Riskiteoria, 10.12.-15

1. $\begin{cases} \mathbb{E}(e^{sK_1}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(e^{sK_1} \mid Q)) = \mathbb{E}(e^{\lambda_1 Q(e^s-1)}) \\ \mathbb{E}(e^{sK_2}) = e^{\lambda_2(e^s-1)} \end{cases}$

$$\mathbb{E}(e^{s(K_1+K_2)}) = \mathbb{E}(e^{\lambda_1 Q(e^s-1)})\, e^{\lambda_2(e^s-1)}$$

$$= \mathbb{E}\left(e^{(\lambda_1+\lambda_2)\frac{\lambda_1 Q+\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}(e^s-1)}\right) = \mathbb{E}(e^{(\lambda_1+\lambda_2)Q'(e^s-1)}),$$

$Q' = \dfrac{\lambda_1 Q+\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$ on strukturimuuttuja, koska $\mathbb{E}(Q')=1$.

Siis $K_1+K_2 \quad pPo-(\lambda_1+\lambda_2, Q')$

2. $\begin{cases} \mathbb{E}(e^{sZ}) = \int_0^\infty e^{-z}e^{sz}\,dz = \frac{1}{1-s}, \quad s<1 \\ M_Z'(s) = \frac{1}{(1-s)^2}, \quad M_Z''(s) = \frac{2}{(1-s)^3} \Rightarrow \mathbb{E}(Z)=1,\ \mathbb{E}(Z^2)=2 \end{cases}$

$\mathbb{E}(X) = \lambda\mathbb{E}(Z) = 200, \quad Var(X) = \lambda\mathbb{E}(Z^2) = 400$

$$\mathbb{P}(X > P+U_0) \approx 1-\phi\left(\frac{P+U_0-\mathbb{E}(X)}{\sqrt{Var X}}\right) = 1-\phi\left(\frac{46}{20}\right) > 1-\phi(2.33)$$
$= 0.01$, yhtiö ei täytä vaatimusta.

Jos SL-raja on M, on vararikko-tn

$$\mathbb{P}(\min(X, M) > U_0+P-p^{SV}(M))$$

Jos $M \leq U_0+P-p^{SV}(M)$, niin tämä on $=0$. Jos

$M > U_0+P-p^{SV}(M)$, niin vararikko tapahtuu, jos ja vain jos

$$X > U_0+P-P(M),$$

Tämän tn on $\geq \mathbb{P}(X > U_0+P) > 0.01$.

3. X on Poisson-jakautunut parametrilla

$$\int_0^1 \lambda(s)\,(1 - G(1-s))\,ds, \quad G(t) = t,\ \forall t \in [0,1],$$

$$= \int_0^{1/2} \lambda_1 s\,ds + \int_{1/2}^1 \lambda_2 s\,ds = \frac{\lambda_1}{8} + \frac{3\lambda_2}{8}$$

Parametri on $= \mathbb{E}(X) = \operatorname{Var} X$, joten

$$p = (1+v)\left(\frac{\lambda_1}{8} + \frac{3\lambda_2}{8}\right)$$

4. $$c(s) = \log \mathbb{E}(e^{sX}) - ps = \log e^{\lambda(e^{as}-1)} - ps$$

$$= \lambda(e^{as} - 1) - ps = 10(e^{2s} - 1) - 23s$$

Jos $R > 0$ on sellainen, että $c(R) = 0$, on

$$P(T < \infty) \leq e^{-RU_0}$$

Vakavaraisuusvaatimus toteutuu, jos

$$e^{-RU_0} \leq 0.01 \quad \text{eli} \quad R \geq -\frac{\log 0.01}{U_0} \approx 0.0921.$$

Nyt $c(0.0921) < 0$, joten $R > 0.0921$.