

missä

$$\hat{\alpha}_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i \quad \text{ja} \quad \hat{\eta}_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i^2.$$

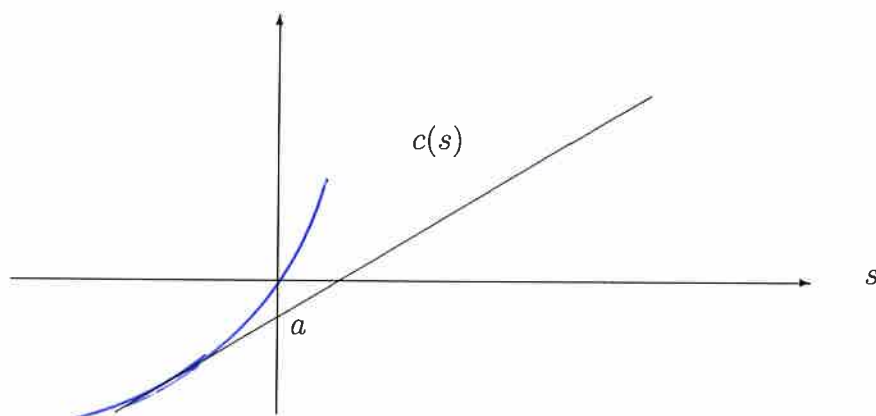
Yllä esitettyä mitan vaihtoon perustuvaa estimointia kutsutaan *kohdennetuksi simuloinniksi* (engl. importance sampling).

**Suurten poikkeamien teoriaa** Edellä esitetyn minimointiongelman ratkaisemisessa nojaututaan *suurten poikkeamien teoriaan*. Esitetään seuraavassa muutamia tähän liittyviä käsitteitä ja tuloksia. Teoria katsotaan alkaneeksi vuonna 1938 ns. Cramérin lauseesta. Huomattavaa kehitystä on tapahtunut viime vuosikymmeninä. Mainittakoon esimerkkinä Gärtner-Ellisin lause, joka sallii riippuvuutta summattaville  $\xi_1, \xi_2, \dots$  (Gärtner (1977), Ellis (1984)).

Olkoot muuttujat  $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$  ja  $S_1, S_2, \dots$  kuten kappaleen 6.3.3 alussa. Olkoon  $\xi$ -muuttujien yhteinen jakauma  $P$ . Määritellään funktion  $c_\xi$  *konvekssi konjugaatti*  $c_\xi^*$  ehdosta

$$c_\xi^*(v) = \sup_{s \in \mathbb{R}} \{sv - c_\xi(s)\}.$$

Tällä on seuraava hyödyllinen geometrinen tulkinta.



Kuvassa  $c$ :n tangentin kulmakerroin on  $v$ . Konjugaattifunktion arvo  $c^*(v)$  on tangentin ja pystyakselin leikkauspisteen  $a$  etäisyys origosta.

**Lemma 6.3.3.1.** Funktioilla  $c_\xi$  ja  $c_\xi^*$  on seuraavat ominaisuudet.

- (i) Molemmat ovat konvekseja.
- (ii)  $c_\xi^*(v) \geq 0$  kaikilla  $v \in \mathbb{R}$ .
- (iii)  $c_\xi^*(\mu_\xi) = 0$ .
- (iv) Jos  $c_\xi'(s_v) = v$  jollain  $s_v \in \mathcal{D}$ , niin  $c_\xi^*(v) = s_v v - c_\xi(s_v)$ .

Oletetaan, että  $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$  ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia. Olkoon  $c$  näiden yhteinen kumulantit generoiva funktio,

$$c(s) = \log \mathbb{E}(e^{s\xi}), \quad s \in \mathbb{R},$$

ja

$$\mathcal{D} = \{s \in \mathbb{R} \mid c(s) < \infty\}.$$

Konvekssi konjugaatti olkoon  $c^*$ ,

$$c^*(v) = \sup_{s \in \mathbb{R}} \{sv - c(s)\}, \quad v \in \mathbb{R}.$$

Merkitään

$$\bar{s} = \sup\{s \in \mathbb{R} \mid c(s) < \infty\} \in [0, \infty]$$

ja

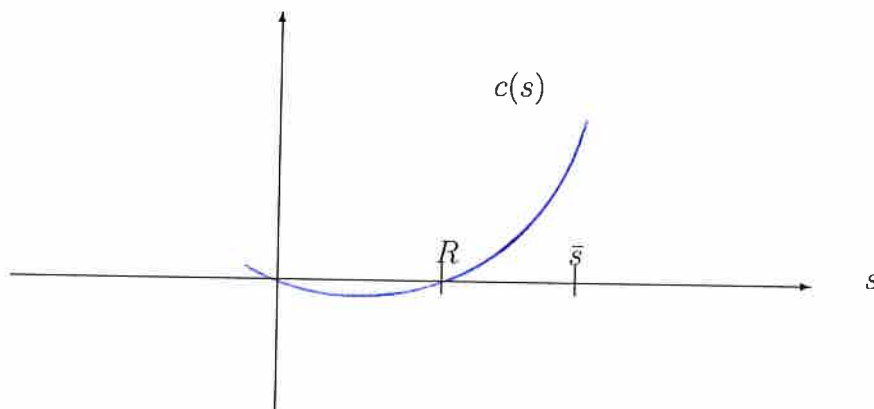
$$\underline{x} = \lim_{s \rightarrow \bar{s}^-} \frac{1}{c'(s)}.$$

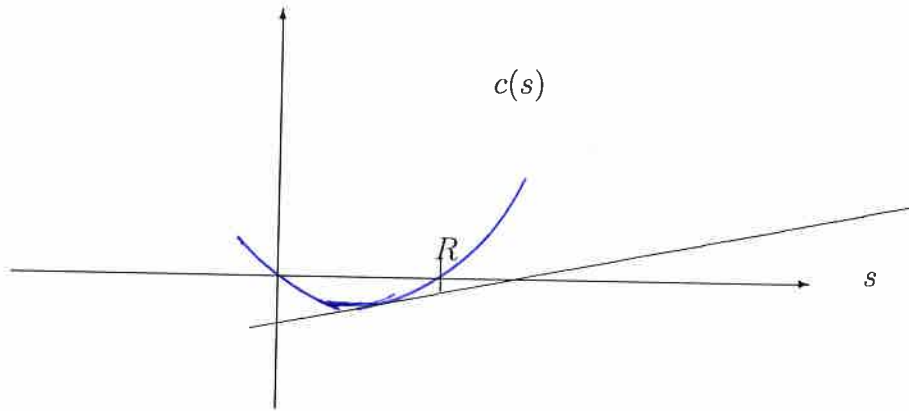
Raja-arvo on olemassa, koska  $c'$  on konveksisuuden nojalla kasvava. Määritellään kuvaus  $h : (\underline{x}, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  ehdosta

$$h(x) = xc^*(1/x).$$

**Lemma 9.1.1.** Olkoon  $\mathbb{E}(\xi) < 0$  ja  $\text{Var}(\xi) > 0$ . Oletetaan lisäksi, että  $c(s) \in (0, \infty)$  jollain  $s > 0$ . Silloin on olemassa yksikäsitteinen  $R \in (0, \infty)$ , jolle  $c(R) = 0$ . Jos  $x \in (\underline{x}, \infty)$ , niin on olemassa yksikäsitteinen  $s_x \in (0, \bar{s})$  siten, että  $c'(s_x) = 1/x$  ja lisäksi  $h'(x) = -c(s_x)$ . Olkoon  $\mu_T = 1/c'(R)$ . Silloin  $h(\mu_T) = R$ ,  $h$  on aidosti vähenevä välillä  $(\underline{x}, \mu_T]$  ja aidosti kasvava välillä  $[\mu_T, \infty)$ .

Parametria  $R$  kutsutaan *Lundbergin eksponentiksi*. Nimitys tulee seuraavan lauseen tuloksista. Oletus  $\mathbb{E}(\xi) < 0$  merkitsee sovelluksen näkökulmasta sitä, että vakuutusmaksu sisältää positiivisen varmuuslisän.





Kuvassa tangentin kulmakerroin olkoon  $1/y$ . Tällöin tangentin ja vaaka-akselin leikkauspisteen etäisyys origosta on  $yc^*(1/y)$ . Lyhin etäisyys on  $R$  ja se saavutetaan, kun  $1/y = c'(R)$ .

**Lauseen 9.1.2 todistus.** Siirrytään kuten edellisen lauseen todistuksessa konjugaattijakaumaan käyttäen nyt kuitenkin lemmän 9.1.1 mukaista parametria  $s_x$ . Saadaan

$$\mathbb{P}(T \leq xU_0) = \mathbb{E}_{s_x} (e^{-s_x Y_T + T c(s_x)} \mathbb{1}(T \leq xU_0)).$$

Ilmeisesti  $c(s_x) \geq 0$ , joten

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T \leq xU_0) &\leq e^{-s_x U_0 + xU_0 c(s_x)} \mathbb{P}_{s_x}(T \leq xU_0) \\ &\leq e^{-x(s_x/x - c(s_x))U_0} = e^{-xc^*(1/x)U_0}. \end{aligned}$$

Saatiin (9.1.3)

Olkoon nyt  $y \in (0, x)$  kiinteä. Kun  $y$  on riittävän lähellä  $x$ :ää, on aidon konveksisuuden nojalla  $y = 1/c'(s_y)$  eräälle  $s_y > s_x$ . Nyt

$$\{Y_{\lfloor yU_0 \rfloor + 1} > U_0\} \subseteq \{T \leq xU_0\},$$

kun  $U_0$  on riittävän suuri. Cramérin lauseen nojalla

$$\begin{aligned} &\liminf_{U_0 \rightarrow \infty} U_0^{-1} \log \mathbb{P}(T \leq xU_0) \\ &\geq \liminf_{U_0 \rightarrow \infty} U_0^{-1} \log \mathbb{P}\left(\frac{Y_{\lfloor yU_0 \rfloor + 1}}{\lfloor yU_0 \rfloor + 1} > \frac{1}{y}\right) \\ &\geq -y \inf_{v > 1/y} c^*(v). \end{aligned}$$

Seuraavan vuoden kokonaisvahinkomäärä  $X_2$  määrätään vastaavasti. Toteutuksessa käytetään vuoden 1 havaintoja  $s_1$  ja  $i_1$  syklin ja inflaatioasteen generoinnissa. Näin jatkaen saadaan vahinkomääriä koskeva vektori  $(X_1, \dots, X_{10})$ . Tämä määrää myös vakuutusmaksurealisaation  $(B_1, \dots, B_{10})$  ja vararikkodikaattori  $T_1$  voidaan muodostaa. Vastaavasti määrätään  $T_2, \dots, T_N$ , kunnes otos voidaan katsoa riittävän suureksi todennäköisyyden  $\mathbb{P}(T \leq 10)$  estimoimiseen.

Ilmeistä on, että menettelyllä saadaan harhattomia estimaatteja vararikkotodennäköisyydelle. Pysäytyssäntö voidaan nytkin perustaa keskeiseen raja-arvolauseeseen. Menettely on melko raskas, jos Poisson-parametri on suuri. Havainnollisuutta tuloksiin saadaan piirtämällä realisaatit:

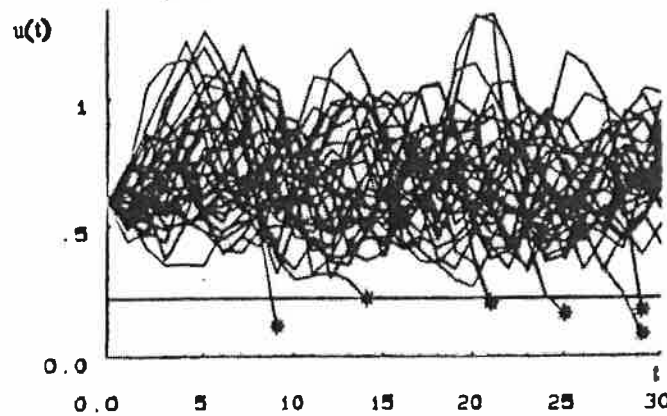


FIG. 4.3.1. Solvency ratio of the standard insurer. Forty realizations.

Lähde: Pentikäinen et al. (1989). Kuva ei perustu edellä tarkasteltuun esimerkkiin.