MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Raja-arvot 2015
Tehtävät 5 A ja L

Alkuviikon tehtävät A1, A2; A3, A4 ja A5

A1 Selvitä kurssilla esitettyjen lukujonojen raja-arvoja koskevien tietojen avulla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{2n^2+5n+7}.$$

A2 Selvitä kurssilla esitettyjen lukujonojen raja-arvoja koskevien tietojen avulla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n^2+5n+7}.$$

A3 Osoita Bernoullin epäyhtälön avulla tarkasti, että

$$\frac{1}{3^n} \to 0 \text{ kun } n \to \infty.$$

(Bernoullin epäyhtälö on kirjan esimerkki 1.4.5.)

A4 Pohdittavaksi yhdessä paikan päällä. Lukujonon raja-arvon määritelmä voidaan kirjoittaa kvanttorimerkeillä lyhyesti muodossa

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists K \in \mathbb{N}_1\, \forall n > K \colon |x_n - a| < \varepsilon.$$

Mitä seuraavat muunnelmat kertovat lukujonosta (x_n):
(a) $\exists K \in \mathbb{N}_1\, \forall \varepsilon > 0\, \forall n > K \colon |x_n - a| < \varepsilon$;
(b) $\exists K \in \mathbb{N}_1\, \exists \varepsilon > 0\, \forall n > K \colon |x_n - a| < \varepsilon$.

A5 Pohdittavaksi yhdessä paikan päällä. Tarkastellaan lukujonoa (x_n), jolle pätee $x_1 = 1$ ja joka toteuttaa kaikilla $n \in \mathbb{N}_1$ yhtälön $x_{n+1} = 2x_n + 1$. Pohditaan tämän jonon suppenemista ja mahdollista raja-arvoa. Mitä mieltä olet seuraavasta päättelystä?

Ajatellaan, että olisi $x_n \to x$ kun $n \to \infty$. Sovelletaan lausetta 2.2.8. Sen nojalla olisi tällöin $2x_n+1 \to 2x+1$ kun $n \to \infty$. Toisaalta varmastikin pätee, että $x_{n+1} \to x$ kun $n \to \infty$. Saamme siis yhtälön $x = 2x + 1$. Ratkaisemalla tämän saamme $x = -1$. Siis jono suppenee ja sen raja-arvo on -1.

Loppuviikon tehtävät L1, L2; L3, L4 ja L5

L1 Oletetaan, että $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, ja että $a = \sup A$. Merkitään $B = \{-x \mid x \in A\}$. Osoita tarkasti, että on olemassa $\inf B \in \mathbb{R}$, ja että $\inf B = -a$. (Tarkista kirjasta infimumin määritelmä.)

L2 Oletetaan, että jono (x_n) suppenee. Osoita, että

$$\frac{(x_n)^{42}}{\sqrt{n}} \to 0$$

kun $n \to \infty$. Tehtävässä on iloa tiedosta, että suppenevat jonot ovat rajoitettuja.

L3 Oletetaan, että $x_n \to a$ kun $n \to \infty$ ja $a \neq 0$. Osoita, että on olemassa sellainen $K \in \mathbb{N}_1$, että kaikilla $n > K$ pätee

$$|x_n| > \frac{1}{2}|a|.$$

Yksi mahdollisuus on tarkastella erikseen tapauksia $a > 0$ ja $a < 0$. Periaatteellisesta kuvasta voi olla paljon apua!

L4 Pohdittavaksi yhdessä paikan päällä. Oletetaan, että lukujonot (x_n) ja (y_n) toteuttavat seuraavat ehdot:
(i) $y_n \to a$ kun $n \to \infty$,
(ii) (x_n) on nouseva, ja
(iii) $x_n \leq y_n$ kaikilla n.
Osoita, että
(iv) $x_n \leq a + 1$ kaikilla n, ja
(v) jono (x_n) suppenee.

L5 Pohdittavaksi yhdessä paikan päällä. Tarkastellaan lukujonoa (x_n), missä $x_1 = 2$ ja

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{3}{x_n})$$

$n \in \mathbb{N}_1$. Osoita, että $x_n \to \sqrt{3}$ kun $n \to \infty$. (Tässä tehtävässä on tarkoitus mukailla luentojen esimerkkiä.)

Lisäkysymys niille, jotka haluavat lisää haastetta. Tehtävän jonolla on ilmeinen yhteys Newtonin menetelmään. Keksitkö ”sukulaisjonon”, jonka raja-arvo on $\sqrt[3]{2}$ ja jonka suppenemisen osaat todistaa? (Koulun tiedot Newtonin menetelmästä eivät kelpaa todistukseksi suppenemiselle!)