

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Raja-arvot 2015
Tehtävät 4 A ja L

Alkuviikon tehtävät A1, A2; A3, A4 ja A5

A1 Osoita määritelmän perusteella, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

A2 Osoita määritelmän perusteella, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2+1} = 0.$$

A3 Osoita määritelmän perusteella, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}) = 0.$$

A4 Pohdittavaksi yhdessä paikan päällä. Osoita määritelmän perusteella, että väite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+1} = 1$$

on epätosi.

A5 Pohdittavaksi yhdessä paikan päällä. Luennolla on osoitettu, miten supremumin avulla voidaan perustella luvun $\sqrt[3]{5}$ olemassaolo. Perustele samaan tapaan luvun $\sqrt{5}$ olemassaolo.

Loppuviikon tehtävät L1, L2; L3, L4 ja L5

L1 Osoita määritelmän perusteella, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+3}{n^2+n+1} = 2.$$

L2 Osoita määritelmän perusteella, että väite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3}{n^2 + n + 1} = 1$$

on epätosi.

L3 Oletetaan, että $x_n = \frac{1}{n}$ kun n on parillinen ja $x_n = \frac{1}{n^2}$ kun n on pariton. Suppeneeko jono (x_n) ? Todista väitteesi!

L4 Pohdittavaksi yhdessä paikan päällä. Oletetaan, että $|x_n| \leq 3$ pätee kaikilla $n = 1, 2, \dots$. Määritellään $y_n = \frac{x_n}{n}$. Osoita, että jono (y_n) suppenee.

L5 Pohdittavaksi yhdessä paikan päällä. Tarkastellaan lukujonoja (x_n) ja (y_n) .

(a) Oletetaan, että molemmat hajaantuvat. Mitä tiedetään jonon $(x_n + y_n)$ suppenemisesta tai hajaantumisesta?

(b) Oletetaan, että molemmat hajaantuvat. Mitä tiedetään jonon $(x_n y_n)$ suppenemisesta tai hajaantumisesta?

(c) Oletetaan, että (x_n) suppenee ja (y_n) hajaantuu. Mitä tiedetään jonon $(x_n + y_n)$ suppenemisestä tai hajaantumisesta?

(d) Oletetaan, että (x_n) suppenee ja (y_n) hajaantuu. Mitä tiedetään jonon $(x_n y_n)$ suppenemisestä tai hajaantumisesta?

(e) Oletetaan, että (x_n) suppenee ja (y_n) hajaantuu. Oletetaan lisäksi, että kaikilla n pätee $x_n \neq 0$. Mitä tiedetään jonon $(x_n y_n)$ suppenemisestä tai hajaantumisesta?