

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Raja-arvot 2015

Tehtävät 7 A

Tällä kertaa tulee vain akuviikon tehtäviä. Tehtävät A1 - A4 muistuttavat yhtä versiota viime syksyn kokeesta.

Alkuviikon tehtävät A1, A2; A3, A4 ja A5

A1 Selvitä

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3}{3n^3 + 5}.$$

Tehtävässä saa käyttää kurssin lauseita ja tietoa vakiojonojen ja jonon (x_n) , missä $x_n = \frac{1}{n}$ kaikilla n , raja-arvoista.

A2 Osoita lukujonon raja-arvon määritelmän perusteella, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n + 5}{2n + 3} = 3.$$

(Tehtävässä ei siis saa vedota kurssilla todistettuihin lukujonon raja-arvoa koskeviin lauseisiin.)

A3 Osoita funktion raja-arvon määritelmän perusteella, että

$$\lim_{x \rightarrow 5} x^2 = 25.$$

A4 Pohdittavaksi yhdessä paikan päällä. Oletetaan, että A on epä-tyhjä ylhäältä rajoitettu reaalilukujoukko, ja että $a = \sup A$. Merkitään

$$B = \{x + y \mid x \in A \text{ ja } y \in A\}.$$

Osoita tarkasti, että $2a = \sup B$.

A5 Pohdittavaksi yhdessä paikan päällä. Jatkuvuus ja derivoituvuus ovat erikoistapauksia raja-arvotiedoista. Funktio f on jatkuva kohdassa x_0

joss $f(x) \rightarrow f(x_0)$ kun $x \rightarrow x_0$. Funktion f derivaatta kohdassa x_0 on luku A joss

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \rightarrow A$$

kun $x \rightarrow x_0$.

Tarkastellaan funktiota f , jolle pätee kaikilla x yhtälö $f(x) = x^2g(x)$. Tässä $g(x) = 1$ kun x on rationaalinen ja $g(x) = 0$ kun x on irrationaalinen. Millä x_0 pätee, että f on

- (a) jatkuva kohdassa x_0 ,
- (b) derivoituva kohdassa x_0 ?

(Tässä tehtävässä paino on pohtimisella. Tavoitteena ei ole käydä läpi kaikkia ratkaisun yksityiskohtia. Tehtävässä on hyötyä tiedosta, että kaikkien reaalilukujen $x < y$ välissä on sekä rationaaliluku että irrationaaliluku.)