

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Raja-arvot 2015 Tehtävät 6 A ja L

Alkuviikon tehtävät A1, A2; A3, A4 ja A5

A1 Osoita määritelmän perusteella, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3}{n^2 + 2} = \infty.$$

A2 Osoita määritelmän perusteella, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - 2}{2n^2 - 1} = \infty.$$

A3 Osoita määritelmän perusteella, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 3n^3}{2n^2 - 1} = -\infty.$$

A4 Pohdittavaksi yhdessä paikan päällä. Tarkastellaan lukujonoa (x_n) , missä kaikilla $n = 1, 2, 3, \dots$ pätee $x_n \geq 0$. Oletetaan, että $x_n \rightarrow a$ kun $n \rightarrow \infty$. Osoita, että $\sqrt{x_n} \rightarrow \sqrt{a}$ kun $n \rightarrow \infty$.

A5 Pohdittavaksi yhdessä paikan päällä. Oletetaan, että $x_n \rightarrow a$ kun $n \rightarrow \infty$.

(i) Osoita suoraan määritelmän perusteella, että $x_{n^2} \rightarrow a$ kun $n \rightarrow \infty$.

(ii) Anna järkevä merkitys väitteelle, että $x_{n-7} \rightarrow a$ kun $n \rightarrow \infty$. Todista saamasi väite.

Onko kirjassa jotain lausetta, josta nämä tulokset seuraavat?

Loppuviikon tehtävät L1, L2; L3, L4 ja L5

L1 Osoita määritelmän perusteella, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 - n = \infty.$$

L2 Selvitä luvun e määritelmän perusteella raja-arvo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{3n}.$$

Tehtävän A4 tuloksesta on apua.

L3 Oletetaan, että $a \in \mathbb{R}$, $x_n \rightarrow a$ ja $y_n \rightarrow \infty$ kun $n \rightarrow \infty$. Osoita, että $x_n + y_n \rightarrow \infty$ kun $n \rightarrow \infty$.

L4 Pohdittavaksi yhdessä paikan päällä. Oletetaan, että $a > 1$. Osoita Bernoullin epäyhtälön avulla, että $a^n \rightarrow \infty$ kun $n \rightarrow \infty$.

L5 Pohdittavaksi yhdessä paikan päällä. Oletetaan, että $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $x_n \rightarrow a$ ja $y_n \rightarrow \infty$ kun $n \rightarrow \infty$. Osoita, että $x_n y_n \rightarrow \infty$ kun $n \rightarrow \infty$. (Entä jos olisi $a = 0$.)