

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Raja-arvot 2015 Tehtävät 3 A ja L

Alkuviikon tehtävät A1, A2; A3, A4 ja A5

A1 Pohdittavaksi yhdessä paikan päällä. Tässä tehtävässä pidetään tunnettuna sitä, että $|x - y|$ ilmaisee reaalilukujen x ja y välisen etäisyyden. Päätele tämän perusteella yhtälön

(a) $|x - 2| = |x + 4|$,

(b) $2|x - 2| = |x + 4|$

ratkaisu. Tulosta ei tässä tehtävässä täydy perustella itseisarvon tarkan määritelmän avulla.

A2 Pohdittavaksi yhdessä paikan päällä.

Todista tarkasti itseisarvon määritelmän perusteella, että

(a) kaikilla x pätee $|x| \geq 0$.

(b) kaikilla x ja y pätee $|xy| = |x||y|$.

A3 Selvitä itseisarvolemman avulla tarkasti, mitkä reaaliluvut toteuttavat epäyhtälön $|x - 3| < 2$. (Tähän tehtävään soveltuu itseisarvolemman muoto $|x| < a$ joss $-a < x < a$.)

A4 Tarkastellaan lauseketta $x^2 - 1$ kun $|x - 1| < 1$. Osoita, että kaikilla tutkittavilla x pätee $|x^2 - 1| \leq 3|x - 1|$.

A5 Sovella edellisen tehtävän tulosta. Mitä tiedämme sen perusteella etäisyydestä $|x^2 - 1|$ jos tiedämme, että $|x - 1| < 3^{-7777}$?

Loppuviikon tehtävät L1, L2; L3, L4 ja L5

L1 Pohdittavaksi yhdessä paikan päällä. Osoita, että kaikilla reaaliluvuilla a ja b ehdot (i) ja (ii) ovat yhtäpitäviä.

(i) $a = b$.

(ii) Kaikilla $\varepsilon > 0$ pätee $|a - b| < \varepsilon$.

L2 Oletetaan, että reaaliluku x toteuttaa ehdot $|x - 1| < 2$ ja $|x - 4| <$

3. Osoita, että tällöin x toteuttaa ehdon $|x - 2| < 1$. Kannattaa soveltaa itseisarvolemmaa.

L3 Osoita, että kaikilla kokonaisluvuilla $n = 1, 2, \dots$ pätee

$$\left| \frac{3n - 1}{2n + 1} - \frac{3}{2} \right| \leq \frac{2}{n}.$$

L4 Oletetaan, että $n > 2^{7777}$. Mitä tiedät tällöin edellisen tehtävän tuloksen nojalla etäisyydestä

$$\left| \frac{3n - 1}{2n + 1} - \frac{3}{2} \right|?$$

L5 Pohdittavaksi yhdessä paikan päällä. Mikä on Bernoullin epäyhtälö? Miten se todistetaan? Vastaus löytyy tutkimalla kirjaa yhdessä.