HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Raja-arvot, syksy 2015
Harjoitus 2 – Ratkaisuehdotuksia

L1. Pohdittavaksi yhdessä paikan päällä. Kurssikirjan esimerkissä 1.2.9. osoitetaan, että luku $\sqrt{2}$ on irrationaalinen. Mukaile päättelyä ja osoita, että luku $\sqrt[5]{3}$ on irrationaalinen. (Voit käyttää tavallisia potenssimerkintöjä toisin kuin kirjan tässä kohdassa tehdään.)

Ratkaisu: Tehdään vastaoletus: Oletetaan että $\sqrt[5]{3}$ on rationaaliluku. Tällöin $\sqrt[5]{3}$ voidaan esittää muodossa p/q, missä $\mathrm{syt}(p,q)=1$, eli lukujen p ja q suurin yhteinen tekijä on 1. Tämä tarkoittaa, että p/q on luvun sievennetyin muoto. Juuren määritelmän perusteella pätee

$$\sqrt[5]{3}=\frac{p}{q} \Leftrightarrow \left(\frac{p}{q}\right)^5 = 3.$$

Muokataan yhtälöä.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{p}{q}\right)^5 = 3 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{p^5}{q^5} = 3 \\ \Leftrightarrow \quad & p^5 = 3\cdot q^5 \end{aligned}$$

Koska 3 jakaa luvun p^5, sen täytyy jakaa myös luku p. Voidaan siis kirjoittaa $p = 3\cdot n$, jollakin kokonaisluvulla n. Sijoitetaan tämä yhtälöön, johon yllä päädyttiin.

$$\begin{aligned} & p^5 = 3\cdot q^5 \\ \Leftrightarrow \quad & (3\cdot n)^5 = 3\cdot q^5 \\ \Leftrightarrow \quad & n^5\cdot 3^5 = 3\cdot q^5 \\ \Leftrightarrow \quad & n^5\cdot 3^4 = q^5 \end{aligned}$$

Tästä voimme päätellä, että 3 jakaa myös luvun q^5 ja siis myös luvun q. Alussa valittiin luvut p ja q sellaisiksi, joilla ei ole yhteisiä tekijöitä. Tästä huolimatta juuri osoitimme että luku 3 jakaa sekä luvun p että luvun q. Tämä on ristiriita. Vastaoletus on kumottu ja todistimme, että $\sqrt[5]{3}$ on irrationaalinen. $\square$

L2. Pohdittavaksi yhdessä paikan päällä.

(a) Oletetaan, että $0 < x < y$. Osoita, että $x^2 < y^2$.

(b) Oletetaan, että $1 < x$. Osoita, että $x^2 < x^5$.

(c) Oletetaan, että $0 < x < 1$. Osoita, että $x^5 < x^2$.

Ratkaisu:

(a) Tunnetaan seuraava ominaisuus epäyhtälöille: Jos $a > 0$ ja $b > c$, pätee $ab > ac$ kaikilla reaaliluvuilla a, b, c. Sovelletaan tätä tietoa valitsemalla $a = x$, $b = x$, $c = y$. Tällöin pätee:

$$x < y \Rightarrow x^2 < xy$$

Toisella valinnalla saadaan:

$$x < y \Rightarrow xy < y^2.$$

Yhdistetään nämä tiedot, jolloin saadaan:

$$x^2 < xy < y^2.$$

(b) Käytetään yllämainittua tietoa valitsemalla $a = x$, $b = x$, $c = 1$. Saadaan:

$$1 < x \Rightarrow x < x^2.$$

Toisella valinnalla $a = x$, $b = x^2$, $c = 1$ saadaan

$$x < x^2 \Rightarrow x^2 < x^3.$$

Kahdella uudella valinnalla saadaan:

$$x^2 < x^3 \Rightarrow x^3 < x^4$$

ja

$$x^3 < x^4 \Rightarrow x^4 < x^5.$$

Yhdistämällä näitä rivejä saadaan $x^2 < x^5$.

(c) Ratkaisun alussa mainittua tietoa käyttämällä saamme ylemmän kohdan kaltaisen päättelyketjun käyttämällä sopivia valintoja.

$$1 > x \Rightarrow x > x^2 \Rightarrow x^2 > x^3 \Rightarrow x^3 > x^4 \Rightarrow x^4 > x^5,$$

jotka yhdistämällä saamme

$$1 > x > x^2 > x^3 > x^4 > x^5$$

ja edelleen $x^5 < x^2$.

L3. Tarkastellaan tehtävän A2 lauseketta

$$\frac{2n^2 + 3}{10n^2 + n},$$

missä $n = 1, 2, 3, \ldots$. Pienennä osoittajaa ja kasvata nimittäjää, niin että löydät positiiviset kokonaisluvut c ja d, joille pätee kurssin tietojen nojalla

$$\frac{2n^2 + 3}{10n^2 + n} \geq \frac{c}{d}$$

kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Ratkaisu:

Arvioidaan tehtävänannon lauseketta vihjeiden mukaisesti.

$$\frac{2n^2+3}{10n^2+n} \geq \frac{2n^2}{10n^2+n} \geq \frac{2n^2}{10n^2+n^2} = \frac{2n^2}{11n^2} = \frac{2}{11},$$

jossa 2 kelpaa luvuksi c ja 11 luvuksi d.

L4. Osoita, että kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$ pätee

$$\frac{2n+5}{n+1} > 2.$$

Ratkaisu: Arvioidaan lauseketta.

$$\frac{2n+5}{n+1} > \frac{2n+5-3}{n+1} = \frac{2n+2}{n+1} = \frac{2(n+1)}{n+1} = 2$$

Huomaa, että arvioimalla eri tavalla voidaan päätyä heikompaan lopputulokseen. Esimerkiksi:

$$\frac{2n+5}{n+1} \geq \frac{2n+5}{n+n} \geq \frac{2n}{2n} = 1$$

L5. Tarkastele erotusta

$$\frac{2n+5}{n+1} - 2$$

ja etsi jokin sellainen luku a, että kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$, jotka toteuttavat ehdon $n > a$, pätee

$$\frac{2n+5}{n+1} < 2 + 10^{-1000}.$$

Ratkaisu: Tutkitaan erotusta:

$$\frac{2n+5}{n+1} - 2 = \frac{2n+5}{n+1} - \frac{2(n+1)}{n+1} = \frac{2n+5-2(n+1)}{n+1} = \frac{2n+5-2n-2}{n+1} = \frac{3}{n+1} < \frac{3}{n}$$

Huomataan, että riittää löytää sellainen a, jolle pätee epäyhtälö

$$\frac{3}{n} < 10^{-1000},$$

kun $n > a$

Löydetään a muokkaamalla saatua epäyhtälöä:

$$\frac{3}{n} < 10^{-1000} \iff 3 < n \cdot 10^{-1000} \iff \frac{3}{10^{-1000}} < n$$

Nähdään, että saatu luku

$$\frac{3}{10^{-1000}} = \frac{3}{\frac{1}{10^{1000}}} = 3 \cdot 10^{1000}$$

kelpaa luvuksi a. Siis yllä olevan perusteella, kun $n > a = 3 \cdot 10^{1000}$, niin

$$\frac{2n+5}{n+1} - 2 < \frac{3}{n} < 10^{-1000}$$

$$\iff \frac{2n+5}{n+1} < \frac{3}{n} + 2 < 2 + 10^{-1000} \implies \frac{2n+5}{n+1} < 2 + 10^{-1000}$$