HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Raja-arvot, syksy 2015
Harjoitus 2 – Ratkaisuehdotuksia

A1. Pohdittavaksi yhdessä paikan päällä. Reaaliluvun x käänteisluku on sellainen (yksikäsitteinen) reaaliluku y, että $xy = 1$. Miksei luvulla 0 ole käänteislukua - miksei nollalla saa jakaa?

Ratkaisu: Huomataan ensin, että reaalilukujen kunta-aksioomista, erityisesti osittelulaista seuraa, että kaikilla $y \in \mathbb{R}$ pätee

$$0y = (0+0)y = 0y + 0y.$$

Vähentämällä yhtälöstä luku $0y$ puolittain saadaan, että

$$0y = 0$$

kaikilla reaaliluvuilla y.
Erityisesti jos luvulla 0 olisi käänteisluku x reaalilukujen kunnassa pätisi, että

$$0 = 0x = 1.$$

Koska reaalilukujen kunnassa nolla-alkio 0 ja ykkösalkio 1 ovat eri alkiot, ei ylläoleva yhtälö ole tosi. Luvulla 0 ei siis ole käänteislukua.
Käänteisluvulla kertomista voi ajatella myös jakamisena, joten tätä tarkoitetaan sillä kun sanotaan, että 'nollalla ei saa jakaa'.

A2. Tarkastellaan lauseketta

$$\frac{2n^2+3}{10n^2+n},$$

missä $n = 1, 2, 3, \ldots$. Kasvata osoittajaa ja pienennä nimittäjää, niin että löydät positiiviset kokonaisluvut a ja b, joille pätee kurssin tietojen nojalla

$$\frac{2n^2+3}{10n^2+n} \leq \frac{a}{b}$$

kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Ratkaisu: Arvioidaan tehtävän lauseketta ylöspäin siten, että saamme sille jonkun ylärajan:

$$\frac{2n^2+3}{10n^2+n} < \frac{2n^2+3}{10n^2} < \frac{2n^2+3n^2}{10n^2} = \frac{1}{2}.$$

Nyt siis luvut $a = 1$, $b = 2$ toteuttavat tehtävänannon ehdon.

A3. Etsi sellainen positiivinen kokonaisluku K, että kaikilla x pätee: jos $2 < x < 3$, niin $x^2 - 4 \leq K(x-2)$. Vihje: kirjoita $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$ ja kasvata ensimmäistä tulontekijää oletuksen $2 < x < 3$ avulla.

Ratkaisu:

$$x^2 - 4 = (x+2)(x-2) \leq 5(x-2)$$

Eli $K = 5$. Päädyimme tähän sillä $x+2$ on välillä $(2,3)$ aidosti kasvava, joten kaikki sen arvot tällä välillä ovat välttämättä pienempiä kuin välin päätepisteessä.

A4. Jatkoa edelliselle tehtävälle. Etsi positiivinen reaaliluku δ, joka on niin pieni, että ehdosta $2 < x < 2 + \delta$ voidaan päätellä

$$4 < x^2 < 4 + 42^{-(42^{42})}.$$

Ratkaisu: Oletetaan, että $\delta < 1$. Tämä on mahdollista, sillä mikäli löydämme luvun $\delta_0 > 1$, jolla tehtävän ehto pätee kaikille $2 < x < 2 + \delta_0$, valitsemalla pienempi delta rajoitamme väliä vain pienemmäksi.

$$x^2 < (2 + \delta)^2 = 4 + 4\delta + \delta^2 < 4 + 5\delta$$

Nyt voidaan valita, että $\delta = \frac{42^{-(42^{42})}}{5}$. Selvästi tämä on yhteensopiva oletuksemme kanssa, että $\delta < 1$, ja tehtävänannon epäyhtälö pätee.

A5. Pohdittavaksi yhdessä paikan päällä. Jatkoa kahdelle edelliselle tehtävälle. Oletetaan, että ε on positiivinen reaaliluku. Onko olemassa sellaista positiivista reaalilukua δ, että $2 < x < 2 + \delta$ voidaan päätellä

$$4 < x^2 < 4 + \varepsilon?$$

Ratkaisu: Oletetaan ensin, että $\delta < 1$. Tällöin

$$x^2 < (2 + \delta)^2 = 4 + 4\delta + \delta^2 < 4 + 5\delta$$

Nyt voidaan valita, että $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$. Aiemmin oletimme, että $\delta < 1$. Tämä toteutuu kun $\varepsilon < 5$. Toisaalta ε oletettiin mielivaltaiseksi positiiviseksi reaaliluvuksi, joten joudumme vielä tarkastelemaan tilanteen $\varepsilon \geq 5$ erikseen. Kuitenkin tässä tapauksessa voidaan valita $\delta = 1$. Nimittäin tällöin

$$x^2 < 3^2 = 9 = 4 + 5 \leq 4 + \varepsilon.$$

Valitsemalla siis, että $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{5}\}$ voimme antaa tehtävän kysymykseen myöntävän vastauksen.
Huomionarvoista on, että tehtävä ratkeaa aivan samalla tavalla kuin edellinen tehtävä vaikka edellisen tehtävän konkreettisen luvun sijasta tässä tehtävässä käytämme merkillistä symbolia ε. Idea on kuitenkin siinä, että tehtävän alussa kiinnitämme positiivisen luvun ε, jolloin siitä tulee jossain mielessä yhtä konkreettinen kuin edellisen tehtävän luvusta $42^{-(42^{42})}$.