HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Raja-arvot, syksy 2015
Harjoitus 7 – Ratkaisuehdotuksia

A1. Selvitä

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+3}{3n^3+5}.$$

Tehtävässä saa käyttää kurssin lauseita ja tietoa vakiojonojen ja jonon (x_n), missä $x_n = \frac{1}{n}$ kaikilla n, raja-arvoista.

Ratkaisu:

Tarkastellaan lauseketta

$$\frac{n^3+3}{3n^3+5}.$$

Otetaan sekä nimittäjästä, että osoittajasta yhteiseksi tekijäksi n^3 jolloin saadaan supistettua:

$$\frac{n^3(1+\frac{3}{n^3})}{n^3(3+\frac{5}{n^3})} = \frac{1+\frac{3}{n^3}}{3+\frac{5}{n^3}}.$$

Kurssin lauseen mukaan suppeneville jonoille x_n ja y_n pätee

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n \text{ ja } \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$$

Ja kun $y_n \neq 0$ pätee

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}.$$

Tiedetään että $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, joten nyt saadaan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} * \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 * 0 = 0.$$

Josta saadaan edelleen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} * \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 * 0 = 0.$$

Lisäksi tiedetään että vakiojonolle a_n pätee

$$\lim_{n\to\infty} a = a.$$

Nyt saadaan kun $n \to \infty$:

$$1 + \frac{3}{n^3} = 1 + 3 * \frac{1}{n^3} \to 1 + 3 * 0 = 1 \text{ ja}$$

$$3+\frac{5}{n^3}=35*\frac{1}{n^3}\to 3+5*0=3$$

Näin ollen saadaan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3}{3n^3+5}=\frac{1}{3}.$$

A2. Osoita lukujonon raja-arvon määritelmän perusteella, että

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6n+5}{2n+3}=3.$$

(Tehtävässä ei siis saa vedota kurssilla todistettuihin lukujonon raja-arvoa koskeviin lauseisiin.)

Ratkaisu:

Olkoon $\varepsilon>0$ ja valitaan $k\geq\frac{2}{\varepsilon}$. Nyt kun $n>k$ pätee:

$$\left|\frac{6n+5}{2n+3}-3\right|=\left|\frac{6n+5-6n-9}{2n+3}\right|=\left|\frac{-4}{2n+3}\right|=\frac{|-4|}{|2n+3|}=\frac{4}{2n+3}<\frac{4}{2n}=\frac{2}{n}<\frac{2}{k}\leq\frac{2}{2/\varepsilon}=\varepsilon.$$

Siis määritelmän mukaan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6n+5}{2n+3}=3.$$

A3. Osoita funktion raja-arvon määritelmän perusteella, että

$$\lim_{x\to 5}x^2=25.$$

Ratkaisu:

Funktion raja-arvon määritelmän mukaan $\lim_{x\to5}x^2=25$, mikäli jokaista $\varepsilon>0$ löytyy sellainen $\delta>0$, että $|x^2-25|<\varepsilon$, kun $0<|x-5|<\delta$.

Muokataan lauseketta

$$\left|x^2-25\right|=|(x-5)(x+5)|\leq|x-5|\,|x+5|$$

Koska tarkastelemme funktion arvoa pisteessä $x=5$, voimme rajoittaa tarkastelun alueeseen $x\in[4,6]$, eli $|x-5|\leq 1$. Tällöin voidaan jatkaa arviointia

$$|x-5|\,|x+5|=(x+5)\,|x-5|\leq 11\,|x-5|$$

Oletetaan, että $\varepsilon>0$, valitaan $\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{11},1\right\}$, ja nyt kun $|x-5|<\delta$ niin pätee

$$\left|x^2-25\right|\leq 11\,|x-5|<11\frac{\varepsilon}{11}=\varepsilon.$$

Siis

$$\lim_{x\to5}x^2=25.$$

A4. Pohdittavaksi yhdessä paikan päällä. Oletetaan, että A on epätyhjä ylhäältä rajoitettu reaalilukujoukko, ja että $a = \sup A$. Merkitään

$$B = \{x + y \mid x \in A \text{ ja } y \in A\}.$$

Osoita tarkasti, että $2a = \sup B$.

Ratkaisu: Joukko A on epätyhjä ja ylhäältä rajoitettu, joten joukko B on epätyhjä ja ylhäältä rajoitettu. Siis on olemassa $\sup B$. Supremumin määritelmän nojalla kaikilla $x \in A$ pätee $x \leq \sup A = a$ ja kaikilla $y \in A$ pätee $y \leq \sup A = a$. Täten summalle $x + y$ pätee

$$x + y \leq \sup A + \sup A = 2a,$$

eli $2a$ on jokin yläraja joukolle B. Supremumin määritelmän mukaan $2a$ on joukon B supremum, jos $2a$ on myös pienin yläraja.

Oletetaan, että $b = \sup B = 2a - h$ jollakin $h > 0$. Valitaan $x_h \in A$ ja $y_h \in A$ siten, että $x_h > a - \frac{h}{2}$ ja $y_h > a - \frac{h}{2}$. Nyt $x_h + y_h \in B$ ja

$$x_h + y_h > a - \frac{h}{2} + a - \frac{h}{2} = 2a - h = b,$$

joten mikään lukua $2a$ pienempi luku ei voi olla joukon B yläraja, eli oletus $\sup B = 2a - h$ ei voi pitää paikkansa. Tästä ja tiedosta, että $2a$ on joukon B yläraja seuraa $\sup B = 2a$.

A5. Pohdittavaksi yhdessä paikan päällä. Jatkuvuus ja derivoituvuus ovat erikoistapauksia raja-arvotiedoista. Funktio f on jatkuva kohdassa x_0 joss $f(x) \to f(x_0)$ kun $x \to x_0$. Funktion f derivaatta kohdassa x_0 on luku A joss

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to A$$

kun $x \to x_0$.

Tarkastellaan funktiota f, jolle pätee kaikilla x yhtälö $f(x) = x^2 g(x)$. Tässä $g(x) = 1$ kun x on rationaalinen ja $g(x) = 0$ kun x on irrationaalinen. Millä x_0 pätee, että f on

(a) jatkuva kohdassa x_0,

(b) derivoituva kohdassa x_0?

(Tässä tehtävässä paino on pohtimisella. Tavoitteena ei ole käydä läpi kaikkia ratkaisun yksityiskohtia. Tehtävässä on hyötyä tiedosta, että kaikkien reaalilukujen $x < y$ välissä on sekä rationaaliluku että irrationaaliluku.)

Ratkaisu:

(a) Tutkitaan lukua $x_0 = 0$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = \min\{1, \varepsilon\}$. Tällöin aina, kun $|x - x_0| = |x - 0| < \delta$, pätee

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f(0)| = \left|x^2 g(x) - 0\right| \leq \left|x^2\right| \leq |x| < \delta \leq \varepsilon,$$

joten $f(x) \to f(x_0)$, kun $x \to x_0$ eli $f(x)$ on jatkuva kohdassa $x_0 = 0$.

Olkoon $x_0 \neq 0$ ja $x_0 \in \mathbb{Q}$. Nyt

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|x^2 g(x) - x_0^2\right| = \begin{cases} x_0^2, \text{ kun } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \left|x^2 - x_0^2\right|, \text{ kun } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Siis $f(x) \not\to f(x_0)$ riippumatta siitä, kuinka pieni etäisyys $|x - x_0|$ on, koska jokaisen reaaliluvun x ja x_0 välistä löytyy sekä rationaali, että irrationaaliluku. Olkoon $x_0 \neq 0$ ja $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Tällöin

$$|f(x) - f(x_0| = \left|x^2 g(x)\right| = \begin{cases} 0, \text{ kun } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ x^2, \text{ kun } x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

joten $f(x) \not\to f(x_0)$ myöskään irrationaalisilla x_0:n arvoilla.

(b) Tarkastellaan lukua $x_0 = 0$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = \varepsilon$. Kun $|x - 0| < \delta$, pätee etäisyydelle

$$\left|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - 0\right| = \left|\frac{x^2 g(x) - 0}{x}\right| = |xg(x)| \leq |x| < \delta = \varepsilon,$$

eli

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to 0, \text{ kun } x \to x_0 = 0,$$

joten $f(x)$ on derivoituva pisteessä $x_0 = 0$.

a)-kohdasta tiedämme, että $f(x)$ on epäjatkuva kaikilla $x_0 \neq 0$, joten $f(x)$ ei ole derivoituva millään $x_0 \neq 0$.