HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Raja-arvot, syksy 2015
Harjoitus 6 – Ratkaisuehdotuksia

L1. Osoita määritelmän perusteella, että

$$\lim_{n\to\infty} n^2 - n = \infty.$$

Ratkaisu: Määritelmän mukaan lukujono x_n kasvaa rajatta, jos jokaista $M \in \mathbb{R}$ kohti on olemassa sellainen kynnys $K \in \mathbb{N}$, että kaikilla $n > K$ pätee $x_n > M$. Lähdetään siis arvioimaan tehtävän lukujonoa alaspäin:

$$n^2 - n = n(n-1) \geq n$$

Arvio pätee silloin, kun $n - 1 \geq 1$ eli $n \geq 2$.

Nyt pääsemme varsinaiseen todistukseen. Olkoon $M \in \mathbb{R}$. Valitaan $K \geq \max\{M, 2\}$ ja oletetaan, että $n > K$. Nyt pätee $n > 2$ ja $n > M$, ja edelleen

$$n^2 - n = n(n-1) \geq n > K \geq M.$$

Siis pätee $\lim_{n\to\infty} n^2 - n = \infty$.

L2. Selvitä luvun e määritelmän perusteella raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{3n}.$$

Tehtävän A4 tuloksesta on apua.

Ratkaisu: Luvun e määritelmän mukaan

$$\lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k} = e.$$

Merkitään $x_n = (1+1/k)^k$. Tutkitaan lukujonoa $y_n = (1+1/(2n))^{2n}$. Tämä lukujono on lukujonon x_n osajono, sillä $y_n = x_{2n}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Koska x_n suppenee kohti raja-arvoa e, kurssin lauseiden perusteella nyt myös y_n suppenee kohti raja-arvoa e, eli

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} = e.$$

Haluamme käyttää tätä tietoa hyväksemme, joten muokataan tehtävänannon lauseketta sellaiseen muotoon, jossa näkyy haluttu lauseke:

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{3n} \overset{*}{=} \sqrt{\left(\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{3n}\right)^2} = \sqrt{\left(\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^3}$$

Ensimmäinen yhtäsuuruus $*$ pätee, sillä selvästi pätee $(1 + 1/(2n))^{3n} \geq 0$ kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Lauseen 2.2.8 perusteella tiedämme, että jos $x_n \to a$, kun $n \to \infty$, niin pätee $x_n^3 \to a^3$, kun $n \to \infty$. Tehtävässä A4 olemme osoittaneet, että jos $x_n \geq 0$ kaikilla $n = 1, 2, 3, ...$ ja $x_n \to a$, kun $n \to \infty$, niin pätee $\sqrt{x_n} \to \sqrt{a}$, kun $n \to a$. Näiden tietojen perusteella voimme päätellä

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{3n} = \sqrt{\left(\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^3} \to \sqrt{e^3},\ \text{kun } n \to \infty.$$

L3. Oletetaan, että $a \in \mathbb{R}$, $x_n \to a$ ja $y_n \to \infty$ kun $n \to \infty$. Osoita, että $x_n + y_n \to \infty$ kun $n \to \infty$.

Ratkaisu: Olkoon $M \in \mathbb{R}$.

Koska oletuksen mukaan lukujono x_n suppenee kohti raja-arvoa a, jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että kaikilla $n > K_\varepsilon$ pätee $|x_n - a| < \varepsilon$. Valitaan $\varepsilon = 1$ ja valitaan tätä vastaava kynnys K_ε. Oletetaan, että $n > K_\varepsilon$. Nyt pätee

$$|x_n - a| < 1 \Rightarrow -1 < x_n - a < 1 \Rightarrow x_n > a - 1.$$

Vastaavasti oletuksen mukaan lukujono y_n kasvaa rajatta, joten jokaista $M' \in \mathbb{R}$ kohti on olemassa sellainen kynnys $K_{M'} \in \mathbb{N}$, että kun $n > K_{M'}$, niin $y_n > M'$. Valitaan $M' = M - a + 1$ ja tätä vastaava kynnys $K_{M'} \in \mathbb{N}$. Oletetaan, että $n > K_{M'}$. Nyt pätee $y_n > M - a + 1$.

Valitaan $K_M = \max\{K_\varepsilon, K_{M'}\}$. Oletetaan, että $n > K_M$. Nyt pätee $n > K_\varepsilon$ ja $n > K_{M'}$, joten pääsemme käyttämään tekemiämme arviointeja hyväksi. Pätee

$$x_n + y_n > (a-1) + y_n > (a-1) + (M - a + 1) = M,$$

joten pätee $x_n + y_n \to \infty$, kun $n \to \infty$.

L4. Pohdittavaksi yhdessä paikan päällä. Oletetaan, että $a > 1$. Osoita Bernoullin epäyhtälön avulla, että $a^n \to \infty$ kun $n \to \infty$.

Ratkaisu: Muokataan termiä a^n.

$$a^n = (1 + (a-1))^n \geq 1 + n(a-1) \geq n(a-1).$$

Todistus: Olkoon $M > 0$. Valitaan $K > M/(a-1)$, missä $K \in \mathbb{N}$, jolloin pätee ylläolevan nojalla

$$a^n \geq n(a-1) > K(a-1) > \frac{M(a-1)}{a-1} = M$$

, kun $n > K$. Siis $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$. □

L5. Pohdittavaksi yhdessä paikan päällä. Oletetaan, että $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $x_n \to a$ ja $y_n \to \infty$ kun $n \to \infty$. Osoita, että $x_n y_n \to \infty$ kun $n \to \infty$. (Entä jos olisi $a = 0$.)

Ratkaisu: Kerätään tarpeellisia työkaluja. Käytetään hyväksi ajatusta tehtäväsarjan 5 tehtävästä L3. Raja-arvon määritelmän nojalla tiedetään, että jollakin kokonaisluvulla $K' > 0$ pätee $|x_n - a| < a/2$ ja edelleen tehtävän nojalla $x_n > a/2$, kun $n > K'$.

Tiedetään myös, että kaikille $M' > 0$, on olemassa $K'' > 0$, jolle pätee $y_n > M'$, kun $n > K''$. Etsitään tilanteeseen sopiva K''. Olkoon K'' sellainen kokonaisluku, että pätee $y_n > 2M/a$, kun $n > K''$.

Todistus: Olkoon $M > 0$. Valitaan $K = \max\{K', K''\}$. Tällöin, kun $n > K$, pätee:

$$x_n y_n > \frac{a}{2} \cdot \frac{2M}{a} = M.$$

Siis $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \infty$. □

Pohditaan vielä kysymystä siitä, mitä tapahtuu tilanteessa $a = 0$. Valitsemalla jonot $(x)_n = 1/n^2$ ja $(y)_n = n$ nähdään, että tulojono voi supeta. Valitsemalla jonot $(x)_n = 1/n$ ja $(y)_n = n^2$ nähdään, että tulojono voi kasvaa rajatta.