HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Raja-arvot, syksy 2015
Harjoitus 6 – Ratkaisuehdotuksia

A1. Osoita määritelmän perusteella, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+3}{n^2+2} = \infty.$$

Ratkaisu: Tutkitaan osamäärälauseketta.

$$\frac{n^3+3}{n^2+2} \geq \frac{n^3}{n^2+2n^2} = \frac{n^3}{3n^2} = \frac{n}{3}$$

Huomataan, että $\frac{n}{3} > M \Leftrightarrow n > 3M$.

Todistus: Oletetaan, että $M > 0$. Valitaan $K \geq 3M$, missä $K \in \mathbb{N}$. Tällöin pätee edelliseen pohdintaan viitaten:

$$\frac{n^3+3}{n^2+2} \geq \frac{n}{3} > \frac{3M}{3} = M,$$

kun $n > K$. Siis $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+3}{n^2+2} = \infty$. $\square$

A2. Osoita määritelmän perusteella, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3-2}{2n^2-1} = \infty.$$

Ratkaisu: Tutkitaan osamäärälauseketta.

$$\frac{3n^3-2}{2n^2-1} \geq \frac{3n^3-2n^3}{2n^2} = \frac{n^3}{2n^2} = \frac{n}{2}$$

Todistus: Olkoon $M > 0$. Valitaan $K \geq 2M$, missä $K \in \mathbb{N}$. Tällöin pätee ylempään pohdintaan viitaten:

$$\frac{3n^3-2}{2n^2-1} \geq \frac{n}{2} > \frac{2M}{2} = M,$$

kun $n > K$. Siis $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3-2}{2n^2-1} = \infty$. $\square$

A3. Osoita määritelmän perusteella, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-3n^3}{2n^2-1} = -\infty.$$

Ratkaisu: Tutkitaan osamäärälauseketta. Arviota tehtäessä on tärkeää huomata, että lausekkeen osoittaja on negatiivinen. Tällöin luku kasvaa nimittäjän kasvaessa ja kasvaa osoittajan kasvaessa.

$$\frac{1-3n^3}{2n^2-1} \leq \frac{n^3-3n^3}{2n^2-1} \leq \frac{n^3-3n^3}{2n^2} = \frac{-2n^3}{2n^2} = -n$$

Todistus: Olkoon $m < 0$. Valitaan $K \geq -m$, missä $K \in \mathbb{N}$ Tällöin pätee ylempään viitaten:

$$\frac{1-3n^3}{2n^2-1} \leq -n < -K \leq m,$$

kun $n > K$. Siis $\lim_{n\to\infty} \frac{1-3n^3}{2n^2-1} = -\infty$. □

A4. Pohdittavaksi yhdessä paikan päällä. Tarkastellaan lukujonoa (x_n), missä kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$ pätee $x_n \geq 0$. Oletetaan, että $x_n \to a$ kun $n \to \infty$. Osoita, että $\sqrt{x_n} \to \sqrt{a}$ kun $n \to \infty$.

Ratkaisu:
Koska $x_n \geq 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin myös $a \geq 0$. Tarkastellaan ensin tapaus $a = 0$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan kynnys $K \in \mathbb{N}$ sellainen että kaikilla $n > K$ pätee

$$|x_n - 0| < \varepsilon^2.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
&|x_n - 0| = x_n < \varepsilon^2 \\
\iff &\sqrt{x_n} < \varepsilon \\
\iff &|\sqrt{x_n} - 0| < \varepsilon \\
\iff &|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}| < \varepsilon
\end{aligned}$$

Täten kun $a = 0$, niin raja-arvon määritelmän perusteella $\sqrt{x_n} \to \sqrt{a}$ kun $n \to \infty$. Oletetaan sitten $a > 0$. Edelleen $\varepsilon > 0$. Valitaan kynnys $K \in \mathbb{N}$ tällä kertaa sellainen että kaikilla $n > K$ pätee

$$|x_n - a| < \varepsilon\sqrt{a}$$

Tällöin pätee

$$\begin{aligned}
|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}| &= \left|\frac{(\sqrt{x_n} + \sqrt{a})(\sqrt{x_n} - \sqrt{a})}{(\sqrt{x_n} + \sqrt{a})}\right| \\
&= \left|\frac{x_n - a}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}}\right| \\
&= \frac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} \\
&\leq \frac{|x_n - a|}{\sqrt{a}} < \frac{1}{\sqrt{a}}\varepsilon\sqrt{a} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Täten, kun $a > 0$ niin raja-arvon määritelmän perusteella $\sqrt{x_n} \to \sqrt{a}$ kun $n \to \infty$. Edellisten kohtien nojalla tehtävän väite pätee.

A5. Pohdittavaksi yhdessä paikan päällä. Oletetaan, että $x_n \to a$ kun $n \to \infty$.

(i) Osoita suoraan määritelmän perusteella, että $x_{n^2} \to a$ kun $n \to \infty$.

(ii) Anna järkevä merkitys väitteelle, että $x_{n-7} \to a$ kun $n \to \infty$. Todista saamasi väite.

Onko kirjassa jotain lausetta, josta nämä tulokset seuraavat?

Ratkaisu:
Oletetaan, että tehtävän lukujono (x_n) on määritelty luonnollisesta luvusta 1 alkaen eli että $n = 1, 2, 3, \ldots$, jolloin tiedetään, että lukujonon ensimmäinen jäsen on x_1 jne.

(i) Oletetaan $\varepsilon > 0$. Oletuksesta seuraa, että on olemassa kynnys $K \in \mathbb{N}$, siten että kaikilla $n > K$ pätee

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Koska kaikilla n pätee $n^2 \geq n$ niin tällöin kaikilla $n > K$ myös $n^2 > K$, jolloin saadaan

$$|x_{n^2} - a| < \varepsilon.$$

Täten $x_{n^2} \to a$ kun $n \to \infty$.

(ii) Lukujono (x_{n-7}) on lukujono, jonka kadeksas jäsen on lukujonon (x_n) ensimmäinen jäsen ($x_{8-7} = x_1$). Sen yhdeksäs jäsen on vastaavasti lukujonon (x_n) toinen jäsen jne. Lukujonon (x_{n-7}) seitsemästä ensimmäisestä jäsenestä emme pysty sanomaan mitään varmaa, ne täytyy määritellä erikseen. Joka tapauksessa kohdan (ii) väite on se, että lukujono, joka kahdeksannesta jäsenestä alkaen on identtinen lukujonon (x_n) kanssa, suppenee samaan lukuun kuin (x_n). Osoitetaan tämä triviaalilta tuntuva väite täsmällisesti.
Olkoon $\varepsilon > 0$. Nyt on olemassa kynnys $K \in \mathbb{N}$, siten että kaikilla $n > K$ pätee

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Valitaan nyt $K_2 \in \mathbb{N}$ sellainen, että $K_2 = K + 7$. Tällöin kaikille $n > K_2$ pätee $n > K + 7$ eli $n - 7 > K$, joten

$$|x_{n-7} - a| < \varepsilon \ \forall \ n > K_2$$

Täten $x_{n-7} \to a$ kun $n \to \infty$.

Tapaus (i) on suppenevan jonon (x_n) osajono, joten lauseen 2.2.12 perusteella tapaus (i) suppenee samaan lukuun kuin (x_n) eli lukuun a.
Toisaalta suppeneva jono (x_n) on osajono tapaukselle (ii), joten lauseen 2.2.12 perusteella jos jono (x_{n-7}) suppenee, niin jonon (x_{n-7}) täytyy supeta samaan lukuun kuin (x_n).