HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Raja-arvot, syksy 2015
Harjoitus 5 – Ratkaisuehdotuksia

L1. Oletetaan, että $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, ja että $a = \sup A$. Merkitään $B = \{-x \mid x \in A\}$. Osoita tarkasti, että on olemassa $\inf B \in \mathbb{R}$, ja että $\inf B = -a$. (Tarkista kirjasta infimumin määritelmä.)

Ratkaisu: Palautetaan mieliin mitä infimum oikeastaan tarkoittaa . Siinä missä supremum tarkoittaa ylhäältä rajoitetun epätyhjän reaalilukujen osajoukon pienintä ylärajaa, tarkoittaa infimum analogisesti alhaalta rajoitetun epätyhjän reaalilukujen osajoukon suurinta alarajaa. Kyseessä ei siis ole mitenkään uusi ja kummallinen asia vaan täysin luonnollinen vastine supremumin määritelmälle. Jossain mielessä nämä kaksi ovat saman kolikon kaksi kääntöpuolta..

Epätyhjän, alhaalta rajoitetun reaalilukujen osajoukon E *infimum* on siis sellainen reaaliluku p, joka toteuttaa seuraavat kaksi ehtoa:

(i) p on joukon E alaraja eli kaikilla $x \in E$ pätee $x \geq p$

(ii) Jos q on joukon E alaraja niin $p \geq q$.

Oletuksen nojalla joukko $A \neq \emptyset$, joten on olemassa reaaliluku $y \in A$. Koska reaaliluvun x vastaluku $-x$ on myös reaaliluku ja merkitsemme, että $B = \{-x \mid x \in A\}$, niin B on reaalilukujen osajoukko. Tavoitteenamme on nyt osoittaa, että luku $-a$ toteuttaa yllämainitut ehdot.

Ensinnäkin koska a on joukon A yläraja pätee

$$x \leq a \quad \forall x \in A,$$

joten

$$-x \geq -a \quad \forall x \in A.$$

Siis $-a$ on joukon B alaraja. Eli ehto (i) toteutuu.

Olkoon sitten b joukon B alaraja. Tällöin

$$-x \geq b \quad \forall x \in A,$$

joten

$$x \leq -b \quad \forall x \in A.$$

Siispä luku $-b$ on joukon A yläraja. Toisaalta oletuksen nojalla $a = \sup A$, joten

$$a \leq -b \quad \Leftrightarrow \quad -a \geq b.$$

Siis myös ehot (ii) toteutuu luvulle $-a$ ja voimme päätellä, että $\inf B = -a$.

L2. Oletetaan, että jono (x_n) suppenee. Osoita, että

$$\frac{(x_n)^{42}}{\sqrt{n}} \to 0$$

kun $n \to \infty$. TehtŠävässä on iloa tiedosta, että suppenevat jonot ovat rajoitettuja.

Ratkaisu: Jonosta (x_n) ei kerrota tarkemmin tietoa, kuin että se suppenee joten on luultavimmin hankalaa näyttää kurssin lauseiden perusteella, että

$$\frac{(x_n)^{42}}{\sqrt{n}} \to 0.$$

Koitetaan siis edetä sillä tavalla, jonka tiedämme ainakin varmasti toimivaksi eli käytetään lukujonon raja-arvon määritelmää. Kuten tehtävänannossa iloisesti todetaan, suppenevat jonot ovat rajoitettuja (Lause 2.2.7) joten tiedämme, että on olemassa sellainen $M > 0$, että $|x_n| \leq M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Tutuksi tulleen metodin mukaan lähdetään tutkimaan lukujonon (y_n), missä $y_n = \frac{x_n^{42}}{\sqrt{n}}$ yleisen termin ja raja-arvoehdokkaan 0 erotuksen itseisarvoa.

$$|y_n - 0| = \left|\frac{x_n^{42}}{\sqrt{n}}\right| \overset{(\star)}{=} \frac{|x_n|^{42}}{\sqrt{n}} \leq \frac{M^{42}}{\sqrt{n}}.$$

($\star$) Yhtälö perustuu siihen, että rationaalilausekkeen nimittäjä on aina positiivinen, kun $n \in \mathbb{N}$, jolloin itseisarvon määritelmän nojalla $|\sqrt{n}| = \sqrt{n}$ ja toisaalta sen kurssin alkupuolella osoittamamme itseisarvoihin liittyvän tiedon, että $|xy| = |x||y|$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$ perusteella voimme induktiolla päätellä, että $|x^n| = |x|^n$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{N}$. Erityisesti siis $|x_n^{42}| = |x_n|^{42}$.

Olemme nyt löytäneet tutkittavalle erotuksen itseisarvolle ylärajan, josta näemme, että saamme sen juuri niin pieneksi kuin haluamme, kunhan n on kyllin suuri. Jos $\varepsilon > 0$, niin

$$\frac{M^{42}}{\sqrt{n}} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{M^{84}}{\varepsilon^2}.$$

Kasataan vielä ylläolevat laskumme yhteen varsinaiseksi todistukseksi.

Todistus: Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan 'kynnykseksi' K jokin luonnollinen luku jolle $K \geq \frac{M^{84}}{\varepsilon^2}$ ja oletetaan, että $n > K$. Tällöin

$$|y_n - 0| \leq \frac{M^{42}}{\sqrt{n}} < \frac{M^{42}}{\sqrt{\frac{M^{84}}{\varepsilon^2}}} = \frac{M^{42}}{\frac{M^{42}}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

Lukujono raja-arvon määritelmän nojalla siis $y_n \to 0$ kun $n \to \infty$.

L3. Oletetaan, että $x_n \to a$ kun $n \to \infty$ ja $a \neq 0$. Osoita, että on olemassa sellainen $K \in \mathbb{N}_1$, että kaikilla $n > K$ pätee

$$|x_n| > \frac{1}{2}|a|.$$

Yksi mahdollisuus on tarkastella erikseen tapauksia $a > 0$ ja $a < 0$. Periaatteellisesta kuvasta voi olla paljon apua!

Ratkaisu: Tutkitaan vihjeen mukaisesti tapauksia $a > 0$ ja $a < 0$ erikseen.
Oletetaan ensiksi, että $a > 0$. Tällöin $\frac{a}{2} > 0$, joten löytyy sellainen $K \in \mathbb{N}_1$, että kaikilla $n > K$ pätee

$$|x_n - a| < \frac{a}{2},$$

koska jono x_n suppenee kohti lukua a. Itseisarvolemman nojalla siis

$$-\frac{a}{2} < x_n - a < \frac{a}{2},$$

ja edelleen tutkimalla kaksoisepäyhtälön vasenta epäyhtälöä ja lisäämällä luku a puolittain saadaan

$$\frac{a}{2} < x_n.$$

Koska $x_n \leq |x_n|$ ja koska $-|x_n| \leq 0$ pätee

$$-|x_n| \leq 0 < \frac{a}{2} < x_n \leq |x_n|$$

eli

$$-|x_n| < \frac{a}{2} < |x_n|.$$

Itseisarvolemmasta seuraa nyt, että $|x_n| > \frac{1}{2}|a|$.

Oletetaan sitten, että $a < 0$ ja edetään vastaavasti kuin edellä. Nyt $-\frac{a}{2} > 0$, joten löytyy sellainen $K \in \mathbb{N}_1$, että kaikilla $n > K$ pätee

$$|x_n - a| < -\frac{a}{2}.$$

Itseisarvolemman nojalla siis

$$\frac{a}{2} < x_n - a < -\frac{a}{2},$$

ja edelleen tutkimalla kaksoisepäyhtälön oikeaa epäyhtälöä ja lisäämällä luku a puolittain saadaan

$$x_n < \frac{a}{2}.$$

Erityisesti siis $x_n < 0$, joten $|x_n| = -x_n$ eli $-|x_n| = x_n$. Lisäksi koska $|x_n| \geq 0$ pätee

$$-|x_n| = x_n < \frac{a}{2} < 0 \leq |x_n|$$

eli

$$-|x_n| < \frac{a}{2} < |x_n|.$$

Itseisarvolemmasta seuraa taas, että $|x_n| > \frac{1}{2}|a|$.

On siis osoitettu väite todeksi. Väistämättä herää kysymys, miksi oletimme alussa, että $a \neq 0$? Vastaesimerkiksi saattaisi esimerkiksi sopia jokin lukua 0 kohti suppeneva vakiojono :) .

Huomautus: Tämä irralliselta tuntuva tulos saa selkeän motivaation kun tutkimme lauseen 2.2.8 kohtaa, jossa osoitamme, että kahden jonon osamäärän raja-arvo on jonojen raja-arvojen osamäärä.

L4. Oletetaan, että lukujonot (x_n) ja (y_n) toteuttavat seuraavat ehdot:

(i) $y_n \to a$ kun $n \to \infty$,

(ii) (x_n) on nouseva, ja

(iii) $x_n \leq y_n$ kaikilla n.

Osoita, että

(iv) $x_n \leq a+1$ kaikilla n, ja

(v) jono (x_n) suppenee.

Ratkaisu:

Osoitetaan ensin väite (iv):

Oletuksesta (i) saadaan tieto, että on olemassa kynnys k, jolle pätee

$$|y_n - a| < 1$$

kun $n > k$, joka on itseisarvolemman mukaan yhtäpitävää epäyhtälön

$$-1 < y_n - a < 1$$

kun $n > k$, kanssa, josta edelleen saadaan:

$$y_n - a < 1$$

$$\Longrightarrow y_n < a + 1$$

(1) Nyt oletuksista (iii) ja (i) yhdessä saadaan:

$$x_n \leq y_n < a + 1$$

kaikilla $n > k$.

(2) Lopulta oletuksesta (ii) tiedämme, että $x_{n-1} \leq x_n$. Siis myös kaikilla $n \leq k$ pätee $x_n < a+1$.

Siis (1) ja (2) yhdessä osoittavat, että kaikilla n pätee

$$x_n < a + 1 \Longrightarrow x_n \leq a + 1$$

Osoitetaan sitten väite (v).

Merkitään $A = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$. Kohdan (iv) perusteella joukko A on ylhäältä rajoitettu. Lisäksi A on selvästi epätyhjä. Siis joukolla A on sup $A = s$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Lauseen 1.2.8 mukaan kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa $x_{n\varepsilon} \in A$, jolle pätee

$$s - \varepsilon < x_{n\varepsilon} \leq s$$

Oletuksen (ii) mukaan tällöin pätee

$$s - \varepsilon < x_{n\varepsilon} \leq x_n \leq s$$

kun $n > n_\varepsilon$. Tätä muokkaamalla saadaan

$$s - \varepsilon < x_n \leq s$$

$$\Longleftrightarrow -\varepsilon < x_n - s \leq 0$$

$$\Longrightarrow -\varepsilon < x_n - s < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow |x_n - s| < \varepsilon$$

kun $n > n_\varepsilon$, josta (v) seuraa.

L5. Tarkastellaan lukujonoa (x_n), missä $x_1 = 2$ ja

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{3}{x_n})$$

$n \in \mathbb{N}_1$. Osoita, että $x_n \to \sqrt{3}$ kun $n \to \infty$. (Tässä tehtävässä on tarkoitus mukailla luentojen esimerkkiä.)

Ratkaisu:

Osoitetaan ensin että lukujono (x_n) on alhaalta rajoitettu ja vähenevä. Tällöin lauseen 2.3.2 mukaan x_n suppenee.

Huomataan että selvästi $x_n \geq 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Siis luku jono (x_n) on alhaalta rajoitettu.

Tutkitaan seuraavaksi erotusta $x_{n+1} - x_n$.

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n + \frac{3}{x_n}}{2} - x_n = \frac{x_n + \frac{3}{x_n} - 2x_n}{2} = \frac{\frac{3}{x_n} - x_n}{2} = \frac{3 - x_n^2}{2x_n}$$

Pyritään arvioimaan termiä x_n^2 siten, että saadaan yllä olevasta erotuksesta jotain negatiivista.

$$\begin{aligned}
x_{n+1}^2 &= \left(\frac{1}{2}(x_n + \frac{3}{x_n})\right)^2 = \frac{1}{4}\left(x_n + \frac{3}{x_n}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(x_n^2 + 6 + \frac{9}{x_n^2}\right) = \frac{1}{4}\left(x_n^2 + 6 - 12 + 12 + \frac{9}{x_n^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(x_n - 6 + \frac{9}{x_n^2} + 12\right) \\
&= \frac{1}{4}\left((x_n - \frac{3}{x_n})^2 + 12\right) = \frac{1}{4}\left(x_n - \frac{3}{x_n}\right)^2 + 3 \geq 3
\end{aligned}$$

Yhtälöketjun nojalla saimme, että $x_{n+1}^2 \geq 3$. Lisäksi $x_1^2 = 4$, joten $x_n^2 \geq 3$ kaikilla n.

Nyt voimme arvioida erotusta $x_{n+1} - x_n$:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{3 - x_n^2}{2x_n} \leq 0$$

kaikilla n
Siis koska $x_{n+1} - x_n \leq 0$, niin jono x_n on vähenevä.
Nyt käyttämällä kirjan lausetta 2.3.2 ja 2.2.12 tiedetään että jollakin $a \in \mathbb{R}$

$$x_n \longrightarrow a$$

kun $n \longrightarrow \infty$ ja

$$x_{n+1} \longrightarrow a$$

kun $n \longrightarrow \infty$
Toisaalta pätee

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{3}{x_n}\right) \longrightarrow \frac{1}{2}\left(a + \frac{3}{a}\right),$$

kun $n \longrightarrow \infty$ lauseen 2.2.8 perusteella. Nyt lauseen 2.2.6 perusteella saamme yhtälön

$$a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{3}{a}\right)$$

$$\iff 2a = a + \frac{3}{a}$$

$$\iff a = \frac{3}{a}$$

$$\iff a^2 = 3$$

Saimme lopulta, että $a = \sqrt{3}$, joten lukujono (x_n) suppenee lukuun $\sqrt{3}$, kun $n \longrightarrow \infty$