HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Raja-arvot, syksy 2015
Harjoitus 5 – Ratkaisuehdotuksia

A1. Selvitä kurssilla esitettyjen lukujonojen raja-arvoja koskevien tietojen avulla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{2n^2+5n+7}.$$

Ratkaisu: Muokataan aluksi tutkittavaa lukujonoa tässä tapauksessa hyödyllisempään muotoon

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{2n^2+5n+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(3+\frac{1}{n^2})}{n^2(2+\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2})} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}}.$$

Lukujonon raja-arvon määritelmän perusteella voidaan helposti osoittaa, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ ja } \lim_{n\to\infty} a = a,$$

kun a on jokin reaaliluku, joten oletetaan nämä tunnetuiksi. Nyt kirjan lauseen 2.2.8 ja edellisten tulosten perusteella saadaan:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right) = 0\cdot 0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(5\cdot\frac{1}{n}\right) = 5\cdot 0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{7}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(7\cdot\frac{1}{n^2}\right) = 7\cdot 0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(3+\frac{1}{n^2}\right) = 3+0 = 3$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(2+\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}\right) = 2+0+0 = 2.$$

Nyt koska

$$2+\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2} \neq 0 \text{ ja } 2 \neq 0,$$

kaikilla luonnollisilla luvuilla $n = 1, 2, 3\ldots$, voidaan edelleen soveltaa lausetta 2.2.8 saaden

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{2n^2+5n+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}} = \frac{3}{2}.$$

A2. Selvitä kurssilla esitettyjen lukujonojen raja-arvoja koskevien tietojen avulla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n^2+5n+7}.$$

Ratkaisu: Muokataan jälleen tutkittavaa lukujonoa hyödyllisempään muotoon

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n^2+5n+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}}.$$

Nyt kirjan lauseen 2.2.8 sekä tehtävän A1 tulosten perusteella saadaan

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(3\cdot\frac{1}{n}\right)=3\cdot 0=0$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=0+0=0$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}\right)=2+0+0=2.$$

Nyt koska

$$2+\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}\neq 0 \text{ ja } 2\neq 0,$$

kaikilla luonnollisilla luvuilla $n=1,2,3\dots$, voidaan edelleen soveltaa lausetta 2.2.8 saaden

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n^2+5n+7}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}}=\frac{0}{2}=0.$$

A3. Osoita Bernoullin epäyhtälön avulla tarkasti, että

$$\frac{1}{3^n}\to 0 \text{ kun } n\to\infty.$$

(Bernoullin epäyhtälö on kirjan esimerkki 1.4.5.)

Ratkaisu: Bernoullin epäyhtälön mukaan reaaliluvuille $x>-1$ ja luonnollisille luvuille $n=1,2,3,\dots$ on voimassa

$$(1+x)^n\geq 1+nx.$$

Tehtävänannon mukaan täytyy siis osoittaa, että

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}=0.$$

Osoitetaan tämä lukujonon raja-arvon määritelmän perusteella. Tutkitaan lauseketta

$$\left|\frac{1}{3^n}-0\right|,$$

kun $n\in\mathbb{N}$:

$$\left|\frac{1}{3^n}-0\right|=\left|\frac{1}{3^n}\right|=\frac{1}{3^n}=\frac{1}{(1+2)^n}.$$

Huomataan, että Bernoullin epäyhtälön oletukset ovat voimassa $(2>-1, n=1,2,3,\dots)$, joten lauseketta voidaan sen avulla arvioida ylhäältä päin:

$$\frac{1}{(1+2)^n}\leq\frac{1}{1+2n}<\frac{1}{2n}\leq\frac{1}{n}.$$

Huomataan

$$\frac{1}{n}\leq\varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad n\geq\frac{1}{\varepsilon}$$

ja nyt voidaan muodostaa todistus:
Oletetaan $\varepsilon>0$. Valitaan luvuksi k pienin luonnollinen luku, jolle $k\geq\frac{1}{\varepsilon}$. Tällöin

$$\left|\frac{1}{3^n}-0\right|=\left|\frac{1}{3^n}\right|=\frac{1}{(1+2)^n}\leq\frac{1}{1+2n}<\frac{1}{n}<\frac{1}{k}\leq\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}}=\varepsilon,$$

kaikilla $n>k$. Joten siis raja-arvon määritelmän nojalla

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}=0 \quad\text{eli}\quad \frac{1}{3^n}\to 0 \text{ kun } n\to\infty.$$

A4. Lukujonon raja-arvon määritelmä voidaan kirjoittaa kvanttorimerkeillä lyhyesti muodossa

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists K \in \mathbb{N}_1\,\forall n > K\colon |x_n - a| < \varepsilon.$$

Mitä seuraavat muunnelmat kertovat lukujonosta (x_n):

(a) $\exists K \in \mathbb{N}_1\,\forall\varepsilon > 0\,\forall n > K\colon |x_n - a| < \varepsilon$;

(b) $\exists K \in \mathbb{N}_1\,\exists\varepsilon > 0\,\forall n > K\colon |x_n - a| < \varepsilon$.

Ratkaisu: (a) Kirjoitetaan kyseinen ehto sanoin auki: on olemassa sellainen luonnollinen luku K, että kaikilla positiivisilla epsilon ja kaikilla $n > K$ lukujonon etäisyys pisteestä a on alle epsilonin. Siispä jonkun indeksin jälkeen kaikki lukujonon termit ovat "rajoittamattoman lähellä" lukua a, eli x_n on tämän indeksin jälkeen vakiojono.

(b) Nyt ehdon mukaan on olemassa sellainen luonnollinen luku K, ja sellainen positiivinen epsilon, että kaikilla K:ta suuremmilla indekseillä lukujonon termien etäisyys pisteestä a on alle epsilonin. Jonkun kynnyksen jälkeen etäisyys ei voi olla suurempi kuin eräs tietty epsilon, toisin sanoen lukujono on rajoitettu tämän indeksin jälkeen.

On hyvä huomata, että (a) -ehto on tavallista raja-arvoa vahvempi väite; on helppo todistaa, että siitä seuraa että a on jonon x_n raja-arvo. Väitteestä (b) sen sijaan ei voida päätellä mitään senkaltaista. Voimme helposti löytää vastaesimerkin määrittelemällä jonon joka saa jaksollisesti arvoja lukujen $a + \varepsilon$ ja $a - \varepsilon$ välistä.

A5. Tarkastellaan lukujonoa (x_n), jolle pätee $x_1 = 1$ ja joka toteuttaa kaikilla $n \in \mathbb{N}_1$ yhtälön $x_{n+1} = 2x_n + 1$. Pohditaan tämän jonon suppenemista ja mahdollista raja-arvoa. Mitä mieltä olet seuraavasta pättelystä?

Ajatellaan, että olisi $x_n \to x$ kun $n \to \infty$. Sovelletaan lausetta 2.2.8. Sen nojalla olisi tällöin $2x_n + 1 \to 2x + 1$ kun $n \to \infty$. Toisaalta varmastikin pätee, että $x_{n+1} \to x$ kun $n \to \infty$. Saamme siis yhtälön $x = 2x+1$. Ratkaisemalla tämän saamme $x = -1$. Siis jono suppenee ja sen raja-arvo on -1.

Ratkaisu: Tutkitaan hieman jonon termejä määrittelevää lauseketta: $x_{n+1} = 2x_n+1$. Selvästi $x_n < 2x_n + 1$ kun $x_n > 0$, ja koska $x_1 = 1$ voimme päätellä, että lukujono on aidosti kasvava ja kaikkialla positiivinen. Tässä vaiheessa pitäisi alkaa epäillä virhettä, sillä on hyvin outoa jos positiivinen, aidosti kasvava jono suppenisi kohti negatiivista lukua. Itseasiassa virhe löytyy jo päättelyn ensimmäisestä virkkeestä. Jotta voisimme käyttää lausetta 2.2.8, meidän täytyy tietää, että summattavilla lukujonoilla oikeasti on raja-arvo olemassa. Kun me "Ajatellan, että olisi $x_n \to x$ kun $n \to \infty$", me teemme oletuksen että kyseinen jono suppenee. Siten emme ole todistaneet, että -1 on kyseisen jonon raja-arvo, vaan ehdollisen väitteen: "Jos jonolla x_n on raja-arvo, se raja-arvo on -1". Tämä on tosi väite vain ja ainoastaan sen takia, että jonolla x_n *ei* ole raja-arvoa.