HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Raja-arvot, syksy 2015
Harjoitus 4 – Ratkaisuehdotuksia

L1. Osoita määritelmän perusteella, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3}{n^2+n+1} = 2.$$

Ratkaisu: Raja-arvon määritelmän mukaan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3}{n^2+n+1} = 2.$$

pätee, kun jokaiselle $\varepsilon > 0$ löytyy kynnys $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\left| \frac{2n^2+3}{n^2+n+1} - 2 \right| < \varepsilon,$$

kun $n > n_\varepsilon$.
Siispä lähdetään etsimään lukua n_ε tutkimalla lauseketta $\left| \frac{2n^2+3}{n^2+n+1} - 2 \right|$:
Kun $n \in \mathbb{N}$, niin

$$\begin{aligned}
\left| \frac{2n^2+3}{n^2+n+1} - 2 \right| &= \left| \frac{2n^2+3}{n^2+n+1} - \frac{2n^2+2n+2}{n^2+n+1} \right| \\
&= \left| \frac{-2n+1}{n^2+n+1} \right| \\
&= \frac{2n-1}{n^2+n+1} \\
&< \frac{2n}{n^2} \\
&= \frac{2}{n}
\end{aligned}$$

Huomataan, että $\frac{2}{n} < \varepsilon$ pätee silloin kun $2 < n\varepsilon$ eli kun $n > \frac{2}{\varepsilon}$.
Todistus:
Olkoon ε>0. Valitaan $n_\varepsilon \geq \frac{2}{\varepsilon}$. Olkoon $n > n_\varepsilon$. Nyt

$$\left| \frac{2n^2+3}{n^2+n+1} - 2 \right| < \frac{2}{n} < \frac{2}{n_\varepsilon} \leq \frac{2}{\frac{2}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

Siis raja-arvon määritelmän perusteella

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3}{n^2+n+1} = 2.$$

L2. Osoita määritelmän perusteella, että väite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3}{n^2+n+1} = 1$$

on epätosi.

Ratkaisu: Raja-arvon määritelmän mukaan väite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3}{n^2+n+1} = 1$$

on epätosi, kun ei päde, että kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa kynnys $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\left|\frac{2n^2+3}{n^2+n+1} - 1\right| < \varepsilon,$$

kun $n > n_\varepsilon$.
Meidän täytyisi siis löytää jokin $\varepsilon > 0$, jolle ei ole olemassa kynnystä $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\left|\frac{2n^2+3}{n^2+n+1} - 1\right| < \varepsilon,$$

kun $n > n_\varepsilon$.
Eli meidän täytyisi siis löytää jokin $\varepsilon > 0$, jolle kaikilla kynnyksillä $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ pätee

$$\left|\frac{2n^2+3}{n^2+n+1} - 1\right| \geq \varepsilon,$$

jollain $n > n_\varepsilon$.
Nyt, kun on selvää, mitä yritämme tehdä, lähdetään tekemään:
Kun $n \in \mathbb{N}$, niin

$$\begin{aligned}\left|\frac{2n^2+3}{n^2+n+1} - 1\right| &= \left|\frac{2n^2+3}{n^2+n+1} - \frac{n^2+n+1}{n^2+n+1}\right| \\ &= \left|\frac{n^2-n+2}{n^2+n+1}\right| \\ &= \frac{n^2-n+2}{n^2+n+1} \\ &\geq \frac{n^2-n}{n^2+n^2+n^2} \\ &= \frac{n^2-n}{3n^2} \\ &= \frac{1-\frac{1}{n}}{3}\end{aligned}$$

Huomataan, että kun $n \geq 2$, niin $\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{2}$, jolloin

$$\frac{1-\frac{1}{n}}{3} \geq \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6}.$$

Todistus:
Valitaan $\varepsilon = \dfrac{1}{6}$. Olkoon $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$. Nyt valitaan $n = n_\varepsilon + 2$, jolle pätee $n > n_\varepsilon$ ja $n \geq 2$. Siis

$$\left|\frac{2n^2+3}{n^2+n+1} - 1\right| \geq \frac{1-\frac{1}{n}}{3} \geq \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6} = \varepsilon.$$

Siis raja-arvon määritelmän perusteella väite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3}{n^2+n+1} = 1$$

on epätosi.

L3. Oletetaan, että $x_n = \frac{1}{n}$ kun n on parillinen ja $x_n = \frac{1}{n^2}$ kun n on pariton. Suppeneeko jono (x_n)? Todista väitteesi!

Ratkaisu: Valistuneesti arvataan, että $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Tähän arvaukseen voi päätyä esim. siten, että lukiotietojen perusteella $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ja $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$. Yritetään siis osoittaa, että $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$:

Kun $n \in \mathbb{N}$, niin $0 < \dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{1}{n}$ ja tällöin siis $0 < x_n \leq \dfrac{1}{n}$.

Nyt

$$|x_n - 0| = |x_n| = x_n \leq \frac{1}{n}$$

Huomataan, että $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$, kun $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Todistus:

Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $n_\varepsilon \geq \dfrac{1}{\varepsilon}$. Olkoon $n > n_\varepsilon$. Nyt

$$|x_n - 0| \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{n_\varepsilon} \leq \varepsilon.$$

Siis $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

L4. Pohdittavaksi yhdessä paikan päällä. Oletetaan, että $|x_n| \leq 3$ pätee kaikilla $n = 1, 2, \ldots$. Määritellään $y_n = \frac{x_n}{n}$. Osoita, että jono (y_n) suppenee.

Ratkaisu: Tehtävänannon oletuksista huomataan, että jonon (x_n) arvot ovat aina suljetulla välillä $[-3, 3]$. Toisaalta jonon (y_n) yleisen termin nimittäjässä oleva n kasvaa rajatta indeksin mukana. Tästä voidaan päätellä, että termin y_n arvot lähenevät välttämättä nollaa, kun n kasvaa. Osoitetaan siis, että jono (y_n) suppenee lukuun 0.

Yleisen termin y_n etäisyydelle nollasta pätee

$$|y_n - 0| = |y_n| = \left|\frac{x_n}{n}\right| = \frac{|x_n|}{|n|} = \frac{|x_n|}{n} \leq \frac{3}{n},$$

missä viimeinen epäyhtälö seuraa tehtävänannon oletuksesta. Huomataan lisäksi yhdenpitävyys

$$\frac{3}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{3}{\varepsilon} < n,$$

missä $\epsilon > 0$. Näiden tietojen avulla voidaan todistaa suppeneminen.

Olkoon $\epsilon > 0$. Valitaan $n_\varepsilon \geq 3/\varepsilon$ ja $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$. Oletetaan, että $n > n_\varepsilon$. Tällöin ylläolevan päättelyn nojalla

$$|y_n| \leq \frac{3}{n} < \frac{3}{n_\varepsilon} \leq \frac{3}{\frac{3}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

Siispä raja-arvon määritelmän nojalla $(y_n) \to 0$, kun $n \to \infty$ eli jono (y_n) suppenee.

L5. Pohdittavaksi yhdessä paikan päällä. Tarkastellaan lukujonoja (x_n) ja (y_n).

(a) Oletetetaan, että molemmat hajaantuvat. Mitä tiedetään jonon $(x_n + y_n)$ suppenemisesta tai hajaantumisesta?

(b) Oletetetaan, että molemmat hajaantuvat. Mitä tiedetään jonon $(x_n y_n)$ suppenemisesta tai hajaantumisesta?

(c) Oletetaan, että (x_n) suppenee ja (y_n) hajaantuu. Mitä tiedetään jonon $(x_n + y_n)$ suppenemisesta tai hajaantumisesta?

(d) Oletetaan, että (x_n) suppenee ja (y_n) hajaantuu. Mitä tiedetään jonon $(x_n y_n)$ suppenemisesta tai hajaantumisesta?

(e) Oletetaan, että (x_n) suppenee ja (y_n) hajaantuu. Oletetaan lisäksi, että kaikilla n pätee $x_n \neq 0$. Mitä tiedetään jonon $(x_n y_n)$ suppenemisesta tai hajaantumisesta?

Ratkaisu: (a) Summajonon (x_n+y_n) suppenemisesta ei voida sanoa mitään. Valitaan ensin vaikkapa $(x_n) = -1, 1, -1, 1, \ldots$ ja $(y_n) = (x_n)$. Siis jono x_n "heilahtelee" lukujen -1 ja 1 välillä eikä näin ollen suppene. Tällöin $(x_n+y_n) = (2x_n) = -2, 2, -2, 2, \ldots$ eli summajono jää heilahtelemaan lukujen -2 ja 2 välille eikä näin ollen suppene.

Toisaalta, jos valitaankin (x_n) kuten edellä, mutta $(y_n) = 1, -1, 1, \ldots$ saadaan summajonoksi $(x_n + y_n) = 0, 0, 0, \ldots$, joka on vakiojono ja suppenee lukuun 0. Tällöinkin siis (y_n) jää hyppimään lukujen -1 ja 1 välille, mutta eri "tahdissa" kuin (x_n), jolloin jonojen termit kumoavat toisensa.

Siispä tässä tapauksessa summajono voi tapauksesta riippuen supeta tai olle suppenematta.

(b) Tulojonolle $(x_n y_n)$ käy samoin kuin summajonollekin. Valitaan nyt $(x_n) = 0, 1, 0, \ldots$ ja $(y_n) = (x_n)$ eli nyt jonot heiluvat 0 ja 1 välillä. Tällöin $(x_n y_n) = 0, 1, 0, \ldots = (x_n)$ eli tulojono hajaantuu.

Toisaalta, jos (x_n) valitaan samoin kuin yllä, mutta $(y_n) = 1, 0, 1, \ldots$ saadaan $(x_n y_n) = 0, 0, 0, \ldots$ eli tulojono on vakiojono, joka suppenee lukuun 0.

Tästä seuraten, jos molemmat jonot hajaantuvat ei tuljonon suppenemisesta voida suoraan sanoa mitään.

(c) Jos (x_n) suppenee ja (y_n) hajaantuu, voidaan osoittaa, että summajono (x_n+y_n) hajaantuu. Todistetaan tämä tekemällä vastaoletus.

Oletetaan, että jono $(x_n + y_n)$ suppenee lukuun $b \in \mathbb{R}$. Toisaalta, tehtävänannon oletuksen nojalla tiedetään, että (x_n) suppenee myös johonkin lukuun $a \in \mathbb{R}$. Osoitetaan, että tällöin jono (y_n) suppenee lukuun $b - a$, mistä saadaan haluttu ristiriita.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Oletusten ja raja-arvon määritelmän nojalla löytyy kynnys $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, jolla pätee

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ja

$$|x_n + y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2},$$

kunhan $n > n_\varepsilon$. Tällöin

$$\begin{aligned}
|y_n - (b - a)| &= |y_n + x_n - x_n - b + a| \\
&= |(y_n + x_n) - b + a - x_n| \\
&\leq |(y_n + x_n) - b| + |a - x_n| \\
&= |(y_n + x_n) - b| + |x_n - a| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

missä ensimmäinen epäyhtälö seuraa kolmioepäyhtälöstä. Näin ollen raja-arvon määritelmän nojalla jono (y_n) suppenee lukuun $b-a$, mutta tämä on ristiriita, sillä jonon (y_n) oletettiin hajaantuvan. Siispä vastaoletus on epätosi ja summajonon $(x_n + y_n)$ täytyy hajaantua.

Tehtävän voisi myös ratkaista käyttämällä kurssin raja-arvojen laskutoimituksia koskevaa lausetta. Oletetaan, että $(x_n) \to a, (x_n + y_n) \to b$. Tällöin pätee

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) - x_n = \lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) + \lim_{n\to\infty} x_n = b + a.$$

Siis täytyy päteä $(y_n) \to a + b$, mistä haluttu ristiriita saadaan.

(d) Tässä tapauksessa jono voi jälleen supeta tai hajaantua. Jos $x_n = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin välttämättä pätee $x_n y_n = 0$ kaikilla n. Siispä jono $(x_n y_n)$ on vakiojono, joka suppenee nollaan.

Toisaalta, jos $x_n = 1$ ja $y_n = n$ kaikilla n, pätee $x_n y_n = n = y_n$. Tällöin jono $(x_n y_n)$ hajaantuu, sillä jono (y_n) hajaantuu.

(e) Tässäkin tapauksessa jono voi supeta tai hajaantua. Hajaantuvaksi tapaukseksi käy sama esimerkki kuin edellisessäkin kohdassa, sillä siinä $x_n \neq 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Suppeneva tapaus saadaan esimerkiksi valitsemalla $x_n = 1/n$, jolloin $(x_n) \to 0$, kun $n \to \infty$ ja $y_n = n$. Tällöin $x_n y_n = 1$ kaikilla n, joten jono $(x_n y_n)$ on vakiojono, joka suppenee lukuun 1.