HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Raja-arvot, syksy 2015
Harjoitus 4 – Ratkaisuehdotuksia

A1. Osoita määritelmän perusteella, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

Ratkaisu: Raja-arvon määritelmän mukaan reaalilukujono (x_n) suppenee kohti lukua $a \in \mathbb{R}$, jos kaikkia $\varepsilon > 0$ vastaa jokin luku $n_\varepsilon > 0$ siten, että $|x_n - a| < \varepsilon$, kun $n > n_\varepsilon$. Tutkitaan etäisyyttä

$$\begin{aligned}
\left|\frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| &= \left|\frac{2(n+1)}{2(2n+1)} - \frac{2n+1}{2(2n+1)}\right| \\
&= \left|\frac{2n+2}{4n+2} - \frac{2n+1}{4n+2}\right| \\
&= \left|-\frac{1}{4n+2}\right| \\
&= \frac{1}{4n+2} \\
&< \frac{1}{4n} \\
&< \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Halutaan valita n_ε siten, että kaikilla $\varepsilon > 0$ pätee

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n} \leq \varepsilon \\
\iff\ & n \geq \frac{1}{\varepsilon},
\end{aligned}$$

joten $n_\varepsilon \geq \frac{1}{\varepsilon}$ on haluamamme luku. Muotoillaan vielä varsinainen todistus.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $n_\varepsilon \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Nyt kaikilla $n > n_\varepsilon$ pätee

$$\left|\frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_\varepsilon} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon,$$

joten

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

A2. Osoita määritelmän perusteella, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+1} = 0.$$

Ratkaisu: Tutkitaan etäisyyttä

$$\begin{aligned}\left|\frac{n+1}{n^2+1}-0\right| &= \frac{n+1}{n^2+1} \\ &< \frac{n+n}{n^2} \\ &= \frac{2}{n}.\end{aligned}$$

Halutaan, että pätee

$$\begin{aligned} & \frac{2}{n} \leq \varepsilon \\ \iff & \frac{n}{2} \geq \frac{1}{\varepsilon} \\ \iff & n \geq \frac{2}{\varepsilon}.\end{aligned}$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $n_\varepsilon \geq \frac{2}{\varepsilon}$. Nyt kaikilla $n > n_\varepsilon$ pätee

$$\left|\frac{n+1}{n^2+1}-0\right| < \frac{2}{n} < \frac{2}{n_\varepsilon} = \frac{2}{\frac{2}{\varepsilon}} = \varepsilon,$$

joten

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+1} = 0.$$

A3. Osoita määritelmän perusteella, että

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}) = 0.$$

Ratkaisu: Tutkitaan etäisyyttä

$$\begin{aligned}\left|\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}\right)-0\right| &= \sqrt{n+3}-\sqrt{n+1} \\ &= \frac{\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}\right)}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{(n+3)-(n+1)}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}} \\ &< \frac{2}{\sqrt{n+1}} \\ &< \frac{2}{\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

Halutaan

$$
\begin{aligned}
& \frac{2}{\sqrt{n}} \le \varepsilon \\
\iff & \frac{\sqrt{n}}{2} \ge \frac{1}{\varepsilon} \\
\iff & \quad n \ge \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2 \\
\iff & \quad n \ge \frac{4}{\varepsilon^2}.
\end{aligned}
$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $n_\varepsilon > \frac{4}{\varepsilon^2}$. Nyt kaikilla $n > n_\varepsilon$ pätee

$$\left|\left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}\right) - 0\right| < \frac{2}{\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n_\varepsilon}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{4}{\varepsilon^2}}} = \varepsilon,$$

joten

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}) = 0.$$

A4. Pohdittavaksi yhdessä paikan päällä. Osoita määritelmän perusteella, että väite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = 1$$

on epätosi.

Ratkaisu: Raja-arvon määritelmän mukaan väite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = 1$$

on tosi jos ja vain jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ jolle pätee:

$$\text{Jos } n \ge k_\varepsilon\,, \text{ niin } \left|\frac{n+1}{2n+1} - 1\right| < \varepsilon\,.$$

Nyt jos löydetään jokin $\varepsilon > 0$, jolle ei löydy edellä mainittua kynnysindeksiä k_ε, niin väittämä saadaan todistettua epätodeksi.

Lähdetään arvioimaan itseisarvolauseketta

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{n+1}{2n+1} - 1\right| &= \left|\frac{n+1}{2n+1} - \frac{2n+1}{2n+1}\right| = \left|\frac{-n}{2n+1}\right| \\
&= \frac{n}{2n+1} \ge \frac{n}{2n+n} = \frac{n}{3n} = \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}
$$

Nyt jos valitaan $\varepsilon = \frac{1}{3} > 0$, niin kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$\left|\frac{n+1}{2n+1} - 1\right| \ge \varepsilon\,,$$

joten löysimme luvun ε jolle ei ole olemassa raja-arvon määritelmässä esiintyvää kynnysindeksiä k_ε. Siis väite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = 1$$

on epätosi.

A5. Pohdittavaksi yhdessä paikan päällä. Luennolla on osoitettu, miten supremumin avulla voidaan perustella luvun $\sqrt[3]{5}$ olemassaolo. Perustele samaan tapaan luvun $\sqrt{5}$ olemassaolo.

Ratkaisu: Halutaan osoittaa, että on olemassa positiivinen reaaliluku a, jolle pätee $a^2 = 5$. Merkitään

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \text{ ja } x^2 < 5\}\,.$$

Koska $0 \in A$, niin A on epätyhjä. Koska kaikilla $x \in A$ pätee $x < 5$, niin A on ylhäältä rajoitettu. Täydellisyysaksiooman nojalla joukolla A on olemassa supremum $\sup A$. Merkitään $a = \sup A$. Osoitetaan seuraavaksi, että $a^2 = 5$, eli että a on hakemamme reaaliluku. Todistus onnistuu osoittamalla, että epäyhtälöt $a^2 < 5$ ja $a^2 > 5$ johtavat ristiriitaan.

Oletetaan ensin, että $a^2 < 5$. Nyt jos löydetään luku $h > 0$, jolle pätee $(a+h)^2 < 5$, niin $a+h \in A$ ja $a+h > a$, jolloin luku a ei voi olla joukon A supremum. Lähdetään etsimään tällaista lukua h. Nyt jos $0 < h < 1$, niin

$$(a+h)^2 = a^2 + 2ah + h^2 < a^2 + 2ah + h = a^2 + h(2a+1)\,.$$

Lisäksi

$$a^2 + h(2a+1) < 5 \iff h < \frac{5-a^2}{2a+1}\,.$$

Siis halutaan valita h, joka on lukua $\frac{5-a^2}{2a+1}$ pienempi. Otetaan puolet tästä, eli valitaan $h = \min\left\{\frac{1}{2}\frac{5-a^2}{2a+1}, \frac{1}{2}\right\}$ (otamme minimin näistä kahdesta luvusta, sillä haluamme lisäksi varmistaa, että $h < 1$ pätee). Nyt

$$(a+h)^2 < a^2 + h(2a+1) \leq a^2 + \frac{1}{2}(5-a^2) = \frac{a^2+5}{2} < \frac{5+5}{2} = 5\,.$$

Siis $(a+h)^2 < 5$, jolloin $a+h \in A$ sekä $a+h > a$. Koska $a = \sup A$, niin tämä on ristiriita supremumin määritelmän nojalla, sillä nyt a ei ole joukon A yläraja.

Oletetaan sitten, että $a^2 > 5$. Nyt jos löydetään luku $h > 0$, jolle pätee $(a-h)^2 > 5$, niin $a-h$ on joukon A yläraja ja $a-h < a$, jolloin a ei voi olla joukon A supremum. Lähdetään etsimään tällaista lukua h. Kaikilla $h > 0$ pätee

$$(a-h)^2 = a^2 - 2ah + h^2 > a^2 - 2ah\,.$$

Lisäksi

$$a^2 - 2ah > 5 \iff h < \frac{a^2-5}{2a}\,.$$

Siis halutaan valita h, joka on lukua $\frac{a^2-5}{2a}$ pienempi. Otetaan puolet tästä, eli valitaan $h = \frac{1}{2}\frac{a^2-5}{2a} > 0$. Nyt

$$(a-h)^2 > a^2 - 2ah = a^2 - \frac{a^2-5}{2} = \frac{a^2+5}{2} > \frac{5+5}{2} = 5\,.$$

Siis $a-h < a$ ja $a-h$ on joukon A yläraja. Koska $a = \sup A$, niin tämä on ristiriita supremumin määritelmän nojalla, sillä nyt a ei ole joukon A pienin yläraja.

Näin ollen a on positiivinen reaaliluku, jolle ei päde $a^2 < 5$ eikä $a^2 > 5$. Tällöin täytyy päteä $a^2 = 5$, eli $a = \sqrt{5}$.