HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Raja-arvot, syksy 2015
Harjoitus 3 – Ratkaisuehdotuksia

A1. Tässä tehtävässä pidetään tunnettuna sitä, että $|x-y|$ ilmaisee reaalilukujen x ja y välisen etäisyyden. Päättele tämän perusteella yhtälön

(a) $|x-2| = |x+4|$,

(b) $2|x-2| = |x+4|$

ratkaisu. Tulosta ei tässä tehtävässä täydy perustella itseisarvon tarkan määritelmän avulla.

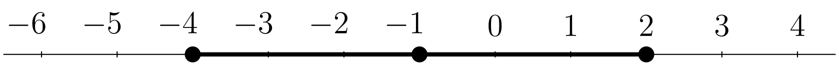
Ratkaisu: (a) Kirjoitetaan ensin yhtälö hiukan toisella tavalla:

$$|x-2| = |x+4| \iff |x-2| = |x-(-4)|$$

Nyt voimme tulkita tehtävän yhtälön siten, että luvun x etäisyys luvusta 2 on yhtä suuri kuin sen etäisyys luvusta -4. Tämän ehdon toteuttaa luku -1. Voimme vielä tarkistaa vastauksen sijoittamalla alkuperäiseen yhtälöön $x=-1$:

$$|-1-2| = |-3| = 3 \text{ ja } |-1+4| = |3| = 3.$$

Tilannetta on helppo havainnollistaa kuvalla:



(b) Kirjoitetaan taas yhtälö niin, että se on helpompi tulkita:

$$2|x-2| = |x+4| \iff 2|x-2| = |x-(-4)|$$

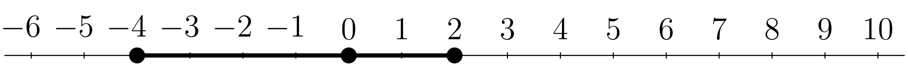
Yhtälö voidaan siis tulkita niin, että luvun x etäisyys luvusta -4 on kaksi kertaa niin suuri kuin sen etäisyys luvusta 2. Tämän ehdon toteuttaa luku 0: sen etäisyys luvusta -4 on 4 ja sen etäisyys luvusta 2 on 2. Ehdon toteuttaa myös luku 8, jonka etäisyys luvusta -4 on 12 ja etäisyys luvusta 2 on 6. Tämäkin ratkaisu voidaan tarkistaa sijoittamalla alkuperäiseen yhtälöön ensin $x=0$:

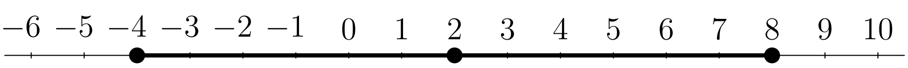
$$2|0-2| = 2|-2| = 4 \text{ ja } |0+4| = |4| = 4$$

ja sitten $x=8$:

$$2|8-2| = 2|6| = 12 \text{ ja } |8+4| = |12| = 12.$$

Tässäkin kohdassa kuvien piirtäminen auttaa tilanteen hahmottamista:





A2. Todista tarkasti itseisarvon määritelmän perusteella, että

(a) kaikilla x pätee $|x| \geq 0$.

(b) kaikilla x ja y pätee $|xy| = |x||y|$.

Ratkaisu: (a) Jokaiselle reaaliluvulle x pätee täsmälleen yksi seuraavista ehdoista: $x > 0$, $x = 0$ ja $x < 0$. Olkoon siis x reaaliluku. Käydään erikseen läpi jokainen edellä mainituista mahdollisuuksista.

Jos pätee $x > 0$, niin itseisarvon määritelmän mukaan pätee $|x| = x$ ja siten $|x| > 0$ ja edelleen $|x| \geq 0$.

Jos pätee $x = 0$, niin itseisarvon määritelmän mukaan pätee $|x| = 0$ ja siten $|x| \geq 0$.

Jos pätee $x < 0$, niin itseisarvon määritelmän mukaan pätee $|x| = -x$ ja $-x > 0$, eli $|x| > 0$ ja edelleen $|x| \geq 0$.

Siis jokaisessa tapauksessa pätee $|x| \geq 0$, joten kaikilla x pätee $|x| \geq 0$.

(b) Tässä kohdassa täytyy myös käydä läpi useampi tapaus. Olkoon x ja y reaalilukuja.

Oletetaan ensin, että pätee $x \geq 0$ ja $y \geq 0$, jolloin pätee myös $xy \geq 0$. Itseisarvon määritelmän mukaan nyt pätee $|x| = x$, $|y| = y$ ja $|xy| = xy$, joten pätee myös $|xy| = xy = |x||y|$.

Oletetaan seuraavaksi, että pätee $x < 0$ ja $y < 0$, jolloin pätee $xy > 0$. Itseisarvon määritelmän mukaan nyt pätee $|x| = -x$, $|y| = -y$ ja $|xy| = xy$, joten pätee myös $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$.

Oletetaan vielä, että pätee $x \geq 0$ ja $y < 0$, jolloin pätee $xy < 0$. Itseisarvon määritelmän mukaan nyt pätee $|x| = x$, $|y| = -y$ ja $|xy| = -xy$, joten pätee myös $|xy| = -xy = x(-y) = |x||y|$.

Vielä on käsittelemättä tapaus $y \geq 0$ ja $x < 0$. Tämä tapauksen kohdalla todistus on kuitenkin samankaltainen edellisen kohdan todistuksen kanssa, joten todistus voidaan sivuuttaa.

Siis väite pätee kaikissa tapauksissa, joten olemme osoittaneet, että $|xy| = |x||y|$ kaikilla reaaliluvuilla x ja y.

A3. Selvitä itseisarvolemman avulla tarkasti, mitkä reaaliluvut toteuttavat epäyhtälön $|x - 3| < 2$. (Tähän tehtävään soveltuu itseisarvolemman muoto $|x| < a$ joss $-a < x < a$.)

Ratkaisu:
Käytetään tehtävänannossa annettua itseisarvolemman muotoa, jolla siis voidaan arvioida itseisarvomerkkien sisällä olevaa lauseketta alhaalta ja ylhäältä. Itseisarvomerkkien sisällä olevan lausekkeen koko ei vaikuta asiaan. Saadaan

$$|x - 3| < 2 \iff -2 < x - 3 < 2.$$

Nyt lisäämällä kaksoisepäyhtälön jokaiseen kohtaan luku 3 epäyhtälö säilyy ja saadaan

$$-2 < x - 3 < 2 \iff 1 < x < 5.$$

Eli reaaliluvut tällä välillä toteuttavat tehtävän epäyhtälön.

A4. Tarkastellaan lauseketta $x^2 - 1$ kun $|x-1| < 1$. Osoita, että kaikilla tutkittavilla x pätee $|x^2 - 1| \leq 3|x-1|$.

Ratkaisu:
Oletuksesta $|x-1| < 1$ saadaan rajattua x itseisarvolemman avulla samalla tavalla kuin tehtävässä A3 tehtiin. Saadaan

$$|x-1| < 1 \iff -1 < x-1 < 1 \iff 0 < x < 2.$$

Nyt voidaan lähteä arvioimaan lauseketta $|x^2 - 1|$ hajottamalla se tekijöihin ja muistamalla, että tulon itseisarvo on itseisarvojen tulo. Saadaan

$$|x^2 - 1| = |(x+1)(x-1)| = |x+1||x-1|.$$

Koska x on rajoitettu lukujen 0 ja 2 väliin, niin tiedetään että $x+1$ on aina positiivista, joten itseisarvomerkit voidaan poistaa. Vasta itseisarvomerkkien poistamisen jälkeen arvioidaan termiä $x+1$, koska arvioiminen on silloin huomattavasti helpompi tehdä niin että arvio varmasti pätee. Oletuksesta $0 < x < 2$ seuraa

$$|x+1||x-1| = (x+1)|x-1| \leq (2+1)|x-1| = 3|x-1|.$$

Eli siis $|x^2 - 1| \leq 3|x-1|$.

A5. Sovella edellisen tehtävän tulosta. Mitä tiedämme sen perusteella etäisyydestä $|x^2 - 1|$ jos tiedämme, että $|x-1| < 3^{-7777}$?

Ratkaisu:
Koska $|x-1| < 3^{-7777} < 1$, niin myös tehtävän A4 oletus on voimassa jolloin arviota $|x^2 - 1| \leq 3|x-1|$ voidaan käyttää. Nyt vain jatketaan A4:n arviota käyttämällä oletusta $|x-1| < 3^{-7777}$. Nyt siis on käytössä valmiiksi tietoa, jota voidaan varmasti käyttää suoraan itseisarvon arvioimiseen. Saadaan

$$|x^2 - 1| \leq 3|x-1| < 3 \cdot 3^{-7777} = 3^{-7776} = \frac{1}{3^{7776}}$$

Eli $|x^2 - 1| < \dfrac{1}{3^{7776}}$