HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Raja-arvot, syksy 2015
Harjoitus 1 – Ratkaisuehdotuksia

L1. **Pohdittavaksi yhdessä paikan päällä.** Osoita, että kaikilla reaaliluvuilla a ja b ehdot (i) ja (ii) ovat yhtäpitäviä.

(i) $a = b$.

(ii) Kaikilla $\varepsilon > 0$ pätee $|a - b| < \varepsilon$.

Ratkaisu:

Täytyy osoittaa (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Käydään ensiksi läpi (i) $\Rightarrow$ (ii):

Oletetaan $a = b$. Lauseketta muokkaamalla saadaan

$$a = b \Rightarrow a - b = b - b \Rightarrow a - b = 0$$

Nyt kaikilla $\varepsilon > 0$ pätee:

$$0 = |0| = |a - b| < \varepsilon.$$

(i) $\Leftarrow$ (ii):

Oletetaan, että kaikilla $\varepsilon > 0$ pätee $|a - b| < \varepsilon$.

Tehdään vastaoletus, että väite $a = b$ ei päde, eli $a \neq b$. Tällöin pätee joko $a > b$ tai $b > a$. Voimme olettaa, että $a > b$, sillä toinen vaihtoehto käyttäytyy täsmälleen samalla tavalla. Valitaan $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$. Nyt pätee

$$|a - b| = a - b > \frac{a - b}{2} = \varepsilon.$$

Toisaalta oletuksen mukaan kaikilla $\varepsilon > 0$ pätee $|a - b| < \varepsilon$, joten oletuksemme $a \neq b$ on johtanut ristiriitaan. Siis pätee $a = b$.

L2. Oletetaan, että reaaliluku x toteuttaa ehdot:

$$|x - 1| < 2 \text{ ja } |x - 4| < 3.$$

Osoita, että tällöin x toteuttaa ehdon $|x - 2| < 1$. Kannattaa soveltaa itseisarvolemmaa.

Ratkaisu: Oletuksista saamme itseisarvolemmaa avulla johdettua seuraavat epäyhtälöparit:

$$\begin{aligned}
|x - 1| < 2 &\iff -2 < x - 1 < 2 \quad || + 1 \\
&\iff -1 < x < 3 \\
|x - 4| < 3 &\iff -3 < x - 4 < 3 \quad || + 4 \\
&\iff 1 < x < 7
\end{aligned}$$

Jotta molemmat yllä johdetuista epäyhtälöpareista olisivat voimmassa, tulee päteä $1 < x$ ja $x < 3$, jolloin toteutuvat myös $-1 < x$ ja $x < 7$. Tehtävässä kysyttiin x:n etäisyyttä luvusta 2, joten saatetaan epäyhtälö haluttuun muotoon käyttämällä uudelleen itseisarvolemmaa:

$$
\begin{aligned}
& 1 < x < 3 \quad || -2 \\
\iff & -1 < x - 2 < 1 \\
\iff & |x-2| < 1
\end{aligned}
$$

L3. Osoita, että kaikilla kokonaisluvuilla n = 1, 2, . . . pätee

$$\left|\frac{3n-1}{2n+1} - \frac{3}{2}\right| \leq \frac{2}{n}$$

Ratkaisu:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{3n-1}{2n+1} - \frac{3}{2}\right| &= \left|\frac{2(3n-1)}{2(2n+1)} - \frac{3(2n+1)}{2(2n+1)}\right| = \left|\frac{6n-2-6n-3}{4n+2}\right| \\
&= \left|\frac{-5}{4n+2}\right| = \frac{|-5|}{|4n+2|} = \frac{5}{4n+2} \leq \frac{8}{4n+2} \leq \frac{8}{4n} = \frac{2}{n}
\end{aligned}
$$

Yllä arvioitaessa ensin kasvatetaan osoittajassa luku 5 luvuksi 8. Tämän jälkeen pienennetään nimittäjää vähentämällä siitä luku 2.

L4. Oletetaan, että $n > 2^{7777}$. Mitä tiedät tällöin edellisen tehtävän tuloksen nojalla etäisyydestä

$$\left|\frac{3n-1}{2n+1} - \frac{3}{2}\right|?$$

Ratkaisu:

Edellisessä tehtävässä ratkaistiin etäisyydelle tulos:

$$\left|\frac{3n-1}{2n+1} - \frac{3}{2}\right| \leq \frac{2}{n}$$

Siispä, kun $n > 2^{7777}$, tiedetään, voidaan epäyhtälön oikean puolen nimittäjää arvioida alaspäin, jolloin saadaan etäisyydelle arvio:

$$\left|\frac{3n-1}{2n+1} - \frac{3}{2}\right| \leq \frac{2}{n} < \frac{2}{2^{7777}} = 2^{-7776}$$

L5. Pohdittavaksi yhdessä paikan päällä. Mikä on Bernoullin epäyhtälö? Miten se todistetaan? Vastaus löytyy tutkimalla kirjaa yhdessä.

Ratkaisu:

Bernoullin epäyhtälön mukaan reaaliluvuille $x > -1$ ja luonnollisille luvuille $n = 1, 2, 3, ...$ on voimassa

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Se voidaan todistaa induktiolla. Todistus löytyy kirjan sivulta 25 (esimerkki 1.4.5.).