MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Raja-arvot 2015
Tehtävät 2 A ja L

Alkuviikon tehtävät A1, A2; A3, A4 ja A5

A1 Pohdittavaksi yhdessä paikan päällä. Reaaliluvun x käänteisluku on sellainen (yksikäsitteinen) reaaliluku y, että $xy = 1$. Miksei luvulla 0 ole käänteislukua - miksei nollalla saa jakaa?

A2 Tarkastellaan lauseketta

$$\frac{2n^2 + 3}{10n^2 + n},$$

missä $n = 1, 2, 3, \ldots$. Kasvata osoittajaa ja pienennä nimittäjää, niin että löydät positiiviset kokonaisluvut a ja b, joille pätee kurssin tietojen nojalla

$$\frac{2n^2 + 3}{10n^2 + n} \leq \frac{a}{b}$$

kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

A3 Etsi sellainen positiivinen kokonaisluku K, että kaikilla x pätee: jos $2 < x < 3$, niin $x^2 - 4 \leq K(x - 2)$. Vihje: kirjoita $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$ ja kasvata ensimmäistä tulontekijää oletuksen $2 < x < 3$ avulla.

A4 Jatkoa edelliselle tehtävälle. Etsi positiivinen reaaliluku δ, joka on niin pieni, että ehdosta $2 < x < 2 + \delta$ voidaan päätellä

$$4 < x^2 < 4 + 42^{-(42^{42})}.$$

A5 Pohdittavaksi yhdessä paikan päällä. Jatkoa kahdelle edelliselle tehtävälle. Oletetaan, että ε on positiivinen reaaliluku. Onko olemassa sellaista positiivista reaalilukua δ, että $2 < x < 2 + \delta$ voidaan päätellä

$$4 < x^2 < 4 + \varepsilon?$$

Loppuviikon tehtävät L1, L2; L3, L4 ja L5

L1 Pohdittavaksi yhdessä paikan päällä. Kurssikirjan esimerkissä 1.2.9. osoitetaan, että luku $\sqrt{2}$ on irrationaalinen. Mukaile päättelyä ja osoita, että luku $\sqrt[5]{3}$ on irrationaalinen. (Voit käyttää tavallisia potenssimerkintöjä toisin kuin kirjan tässä kohdassa tehdään.)

L2 Pohdittavaksi yhdessä paikan päällä. (a) Oletetaan, että $0 < x < y$. Osoita, että $x^2 < y^2$.

(b) Oletetaan, että $1 < x$. Osoita, että $x^2 < x^5$.

(c) Oletetaan, että $0 < x < 1$. Osoita, että $x^5 < x^2$.

L3 Tarkastellaan tehtävän A2 lauseketta

$$\frac{2n^2+3}{10n^2+n},$$

missä $n = 1, 2, 3, \ldots$. Pienennä osoittajaa ja kasvata nimittäjää, niin että löydät positiiviset kokonaisluvut c ja d, joille pätee kurssin tietojen nojalla

$$\frac{2n^2+3}{10n^2+n} \geq \frac{c}{d}$$

kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

L4 Osoita, että kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$ pätee

$$\frac{2n+5}{n+1} > 2.$$

L5 Tarkastele erotusta

$$\frac{2n+5}{n+1} - 2$$

ja etsi jokin sellainen luku a, että kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$, jotka toteuttavat ehdon $n > a$, pätee

$$\frac{2n+5}{n+1} < 2 + 10^{-1000}.$$