HY Todennäköisyysteoria II, syksy 2015, laskuharjoitukset 9 (18.11.2015)

Optioiden hintoja ja niiden "Kreikkalaiset" Matemaatiisessa rahoitusteoriassa on tapana mallittaa osakkeen arvo $S(\omega)$ hetkellä $t > 0$ lognormalisella jakaumalla, siis

$$S_t(\omega) = S_0 \exp\left(\sigma\sqrt{t}G(\omega) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)$$

jossa $S_0 > 0$ on osakkeen arvo hetkellä 0 ja $G(\omega) \sim \mathcal{N}(0,1)$, eli P:n suhteen satunnaismuuttuja $G(\omega)$ on standardi gaussinen jolla

$$P(G \le x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(y)dy, \qquad \phi(y) = \frac{\exp(-y^2/2)}{\sqrt{2\pi}}$$

Eurooppalainen optio on satunaissmuuttuja $H(\omega) = h(S_t(\omega))$, jossa $x \mapsto h(x)$ on mitallinen.

Option hinta hetkellä 0 on odotusarvo $c(t, S_0, \theta) := E_P(h(S_t))$ tietyn riskineutraali todennäköisyysmitan P suhteen.

1. Osoita että $E_P(S_t) = S_0$, jossa P on annettu riskineutraali hinnoittelutodennäköisyysmitta.

2. Oleta ensin että $x \mapsto h(x)$ on derivoituva ja osoita että $c(t, S_0, \sigma)$ on derivoituva parametrien t, S_0 ja σ:n suhteen, ja voidaan vaihtaa derivoinnin ja integroinnin järjestystä joillakin tasaisen integroivuuden oletuksilla.

3. Osoita että $c(t, S_0, \sigma)$ on derivoituva parametrien t, S_0 ja σ:n suhteen, myös silloin $h(x)$ ei ole derivoituva, joillakin tasaisen integroivuuden oletuksilla.

   Vihjeet

$$\begin{aligned} c(t, S_0, \sigma) &= \int_{\mathbb{R}} h\Big(\exp\big(\log S_0 - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma\sqrt{t}y\big)\Big)\phi(y)dy \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}} h\big(\exp(x)\big)\ \phi\left(\frac{x - \log S_0 + \frac{1}{2}\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}\right)dx \end{aligned}$$

   muuttujan vaihdolla

$$\begin{aligned} x &= \log S_0 - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma\sqrt{t}y \\ y &= \frac{x - \log S_0 + \frac{1}{2}\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}} \ . \end{aligned}$$

Muista myös että standardi-Gaussisen jakauman tiheysfunktiolle pätee $\frac{d}{dx}\phi(x) = -x\phi(x)$.

4. Laske option hinta $c(t, S_0, \sigma)$ ja herkyysparametrit

$$\frac{\partial c(t, S_0, \sigma)}{\partial t}, \; \frac{\partial c(t, S_0, \sigma)}{\partial S_0}, \; \frac{\partial c(t, S_0, \sigma)}{\partial \sigma},$$

silloin kun

(a)

$$h(S_1) = (S_1 - K)^+$$

on eurooppalainen osto-optio (call) lunastushinnalla (strike price) $K > 0$,

(b)

$$h(S_1) = (K - S_1)^+ = (S_1 - K)^- = K - S_1 - (S_1 - K)^+$$

on eurooppalainen myyntioptio (put) lunastushinnalla $K > 0$.

Optioiden hintojen osittaisderivaatat parametrien suhteen mittavat hintojen herkyyksiä parametrien vaihteluun. Yleisesti puhutuaan kreikkalaiseista, koska osittaisederivaattojen nimet tulevat kreikkalaisesta aakkosesta.

$\big(S_t(\omega) - K\big)^+$ kutsutaan eurooppalaiseksi osto-optioksi joka antaa oikeus mutta ei velvollisuutta ostaa yhden osakkeen maturiteetti hetkellä t ennalta sovitulla hinnalla K. Jos markkinahinta $S(\omega)$ on maturiteetin hetkellä korkeampi kun K, option haltija lunastaa optionsa, ostaa osakkeen hinnalla K ja kun myy heti sen pois saa voittoa $\big(S_t(\omega) - K\big)^+$. Jos $S \leq K$, osto-optio on silloin arvoton,

Vastaavasti $\big(S_t(\omega) - K\big)^-$ kutsutaan eurooppalaiseksi myyntioptioksi.Tämän option haltijalla on oikeus (mutta ei velvollisuus) myydä maturiteettin hetkellä t yhden osakkeen ennalta sovitulla hinnalla K.

Osto-myynti pariteetti eurooppalaisten osto- ja myynti-optioiden välissä on yhtälö

$$S_t(\omega) - K = (S_t(\omega) - K)^+ - (K - S_t(\omega))^+$$

Koska vasemman puoleen option hinta hetkellä $t = 0$ on $(S_0 - K)$ eurooppalaisten optioiden hinnoille hetkellä $t = 0$ pätee

$$S_0 - K = c\big((S_t - K)^+\big) - c\big((K - S_t)^+\big)$$

Tässä oletetaan että riskittömien sijoitusten korko on nolla, tai tulevaisuuden hintoja ovat jo korko-diskonttattuja.