**UH Probability Theory II, Fall 2015, Exercises 12, Solutiona (9.12.2015)**

In all problems the random variables live in the probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ and $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ is a sub $\sigma$-algebra of $\mathcal{F}$.

1. Olkoon satunnaismuuttujat $X(\omega), Y(\omega), Z(\omega) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Olkoon

   $$H = \Big\{ \ a(Y) + b(Y)Z : a, b \text{ Borel mitalliset funktiot} \Big\} \cap L_2(\Omega, \sigma(Y,Z), P)$$

   eli $H$ koostuu neliö-integroituvista ja $\sigma(Z,Y)$ mitallisista satunnaismuuttujsta jotka riippuvat lineaarisesti $Z(\omega)$:sta.

   - Osoita että

     $$\hat{X}(\omega) = E_P(X|\sigma(Y)) + \Big( Z(\omega) - E_P(Z|\sigma(Y))(\omega) \Big) \frac{\mathrm{Cov}_P(XZ| \ \sigma(Y))(\omega)}{\mathrm{Var}_P(Z^2|\sigma(Y))(\omega)}$$

     on $X$:n ortogonaalinen projektio aliavaruuteen $H$.

     **R** Tämä seuraa kun osoitamme että

     $$E_P\big((a(Y) + b(Y)Z)(X - \hat{X})\big) = 0$$

     kaikille rajoitetuille Borel mitallisille funktioille $a(y), b(y)$. Käyttämällä ehdollisen odotusarvon määritelmää

     $$E_P\big((a(Y) + b(Y)Z)\widehat{X}\big) = E_P\big((a(Y) + b(Y)Z)(\widehat{a}(Y) + \widehat{b}(Y)Z\big) =$$
     $$E_P(a(Y)\widehat{a}(Y)) + E_P(a(Y)\widehat{b}(Y)Z) + E_P(b(Y)\widehat{a}(Y)Z) + E_P(b(Y)\widehat{b}(Y)Z^2)$$
     $$= E_P\big(a(Y)(E(X|Y) - E(Z|Y)\mathrm{Cov}(X,Z|Y)/\mathrm{Var}(Z,Y))\big)$$
     $$+ E_P(a(Y)Z\mathrm{Cov}(X,Z|Y)/\mathrm{Var}(Z|Y)) + E_P(b(Y)E(X|Y)Z)$$
     $$+ E_P(b(Y)Z^2\mathrm{Cov}(Z,X|Y)/\mathrm{Var}(Z|Y))$$
     $$= E_P(a(Y)X) + E_P(b(Y)ZX) = E((a(Y) + b(Y)Z)X)$$

   - Laske ehdollinen neliövirhe $E_P((\hat{X} - X)^2|\sigma(Z,Y))(\omega)$.

     **R.**

     $$E_P((\hat{X} - X)^2|Z,Y) = E(X^2|Z,Y) + (\hat{X})^2 - 2\hat{X}E(X|ZY)$$

   - Laske ehdollinen neliövirhe $E_P((\hat{X} - X)^2|\sigma(Y))(\omega)$.

     **R.**

     $$E_P((\hat{X} - X)^2|Y) = E(X^2|Y) + E((\hat{X})^2|Y) - 2E(\hat{X}E(X|ZY)|Y)$$
     $$= E(X^2|Y) - E((\hat{X})^2|Y) = E(X^2|Y) - \frac{\mathrm{Cov}(XZ|Y)^2}{\mathrm{Var}(Z|Y)}$$

     jossa projektion ominaisuudesta seuraa $E(\hat{X}E(X|ZY)|Y) = E(\hat{X}^2|Y)$

- Laske neliövirhe $E_P((\hat{X}-X)^2)$.
  **R** Huomataan että projektion määritelmästä seuraa
  $$E_P((X-\hat{X})\hat{X})=0.$$
  Siitä seuraa
  $$E_P((X-\hat{X})^2)=E_P(X^2)-E_P(\hat{X}^2)=$$
  $$E_P(X^2)-E_P(E(X|Y)^2)-E\left(\frac{\mathrm{Cov}(XZ|Y)^2}{\mathrm{Var}(Z|Y)}\right)$$
  Note also that
  $$E_P((X-\hat{X})^2)=\mathrm{Var}(X-\hat{X})=E_P\big(\mathrm{Var}(X-\hat{|}\mathcal{G})\big)+\mathrm{Var}\big(E(X-\hat{X}|\mathcal{G}\big)$$
  where we can plug in $\mathcal{G}=\sigma(Y)$ or $\mathcal{G}=\sigma(Y,Z)$
- Olkoon $V(\omega)=E_P(X|\sigma(Z,Y))(\omega)$. Osoita
  $$E_P((V-X)^2|\sigma(Y,Z))(\omega)\leq E_P((\hat{X}-X)^2|\sigma(Y,Z))(\omega)$$
  $$E_P((V-X)^2|\sigma(Y))(\omega)\leq E_P((\hat{X}-X)^2|\sigma(Y))(\omega)$$
  $$E_P((V-X)^2)\leq E_P((\hat{X}-X)^2)$$

**R.** $(\hat{X}-X)=(\hat{X}-V)+(V-X)$

$$E_P((\hat{X}-X)^2|Y,Z)=E_P((\hat{X}-V)^2|Y,Z)+E_P((V-X)^2|Y,Z)$$
$$=(\hat{X}-V)^2+E_P((V-X)^2|Y,Z)$$

jossa $(\hat{X}-V)^2\geq 0$ ja ristitermille

$$2E_P((\hat{X}-V)(V-X)|Y,Z)=2(\hat{X}-V)\big(V-E_P(X|\,Y,Z)\big)=0$$

josta seuraa

$$E_P((V-X)^2|\sigma(Y,Z))(\omega)\leq E_P((\hat{X}-X)^2|\sigma(Y,Z))(\omega)$$

ehdollistamalla ehdolla $\sigma(Y)$:n $\sigma$-algebran saadaan

$$E_P((V-X)^2|\sigma(Y))(\omega)\leq E_P((\hat{X}-X)^2|\sigma(Y))(\omega)$$

ja ottaamalla odotusarvoa seuraa

$$E_P\big((V-X)^2\big)\leq E_P\big((\hat{X}-X)^2\big)$$

2. Todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, olkoon $N(\omega)$ geometrinen satunnaismuuttuja, parametrilla $p \in (0,1)$,

   siis $P(N = k) = (1-p)^{k-1}p$ kun $k \in \mathbb{N}$, ja olkoon $\{X_k(\omega) : \ k \in \mathbb{N}\}$ $P$-riippumattomien ja samoin jakautuneiden satunnaismuuttujen jono, jossa $P_{X_1}$ on standardi gaussinen jakauma $\mathcal{N}(0,1)$.

   Muistetaan että reaaliarvoisten satunnaismuuttujen kokoelman $\{X_j(\omega)\}_{j \in \mathcal{J}}$ virittämän $\sigma$-algebra

$$\sigma\big(X_j(\omega) : j \in \mathcal{J}\big)$$

   on pienin $\sigma$-algebra joka sisältää joukot

$$\{\omega : (X_{j_1}(\omega), X_{j_2}(\omega), \ldots, X_{j_n}(\omega)) \in B_n\}$$

   jossa $n \in \mathbb{N}$, $\{j_1, \ldots j_n\} \subseteq \mathcal{J}$ on äärellinen indeksien alijoukko ja $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ on Borelin joukko.

   Olkoon

$$Y(\omega) := \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(\omega) \mathbf{1}(k \le N(\omega))$$

   (a) Osoita että $Y(\omega)$ on satunnaismuuttuja.
   **R.** Olkoon

$$Y_n(\omega) := \sum_{k=1}^{\min(n, N(\omega))} X_k(\omega) = \sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) \mathbf{1}(k \le N(\omega))$$

   Osoitamme: $\{Y_n(\omega)\}$ on Cauchy jono $L^2(P)$:ssa.

$$E_P\left(\left\{\sum_{k=1}^{n} X_k \mathbf{1}(k \le N)\right\}^2\right) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} E_P\big(X_k^2 \mathbf{1}(k \le N)\big) + 2\sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \le h < k} E_P\big(X_k X_h \mathbf{1}(k \le N) \mathbf{1}(h \le N)\big)$$

$$\sum_{k=1}^{n} E_P(X_k^2) P(k \le N) + 2\sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \le h < k} E_P\big(X_k) E_P(X_h) P(k \le N) = \sum_{k=1}^{n} (1-p)^{k-1} =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (1-p)^k \le \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k = (1-(1-p))^{-1} = p^{-1} < \infty \text{ ( geometrinen sarja )}$$

$P$-riippumattomuuden nojalla ja koska $E(X_k) = 0$ $E(X_k^2) = 1$.

Koska sarja suppenee seuraa että $E_P((Y_n - Y_m)^2) < \varepsilon$ kun $n, m$ ovat tarpeeksi suuria. Koska $L^2(P)$ on täydellinen avaruus, seuraa että on olemassa $Y(\omega) \in L^2(P)$ jolle $E_P((Y_n - Y)^2) \to 0$ kun $n \uparrow \infty$. Jensenin epäyhtälöstä seuraa $E_P(|Y_n - Y|) \to 0$ ja myös $Y_n \xrightarrow{P} Y$ (stokastisesti).

Osoitamme sen lisääksi että $Y_n(\omega) \to Y(\omega)$ $P$-melkein varmasti: Fubinin lauseesta

$$E_P\biggl(\sum_{k=1}^{\infty} |X_k| \mathbf{1}(N \geq k)\biggr) = \sum_{k=1}^{\infty} E_P\bigl(|X_k| \mathbf{1}(N \geq k)\bigr) = E_P(|X_1|) \sum_{k=1}^{\infty} P(N \geq k)$$

$$= E_P(|X_1|) \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} = E_P(|X_1|) E_P(N) = E_P(|X_1|)\, p^{-1} < \infty$$

Tästä seuraa

$$\sum_{k=1}^{\infty} |X_k(\omega)| \mathbf{1}(N(\omega) \geq k) < \infty$$

$P$-melkein varmasti ja

$$\sum_{k=1}^{\infty} X_k(\omega) \mathbf{1}(N(\omega) \geq k) < \infty$$

jossa sarja suppenee absoluttisesti $P$-melkein varmasti.

Osoittaaksen että rajarvo $L^1(P)$ mielessä ja rajarvo $P$-melkein varma rajarvo täsmäävät, todistamme seuraavan pienen lemman:

**Lemma**: Jos $Y_n(\omega) \to Y(\omega)$ $L^1(P)$ mielessä ja $Y_n(\omega) \to \widetilde{Y}(\omega)$ $P$-melkein varmasti, seuraa $Y(\omega) = \widetilde{Y}(\omega)$ $P$-melkein varmasti.

Tod. Koska $E_P(|Y_n - Y|) \to 0$, $L^1(P)$ konvergenssin karkaterisoinnista seuraa että $\{Y_n\} \subseteq L^1(P)$ on tasaisesti integroituva. Koska $\{Y_n\}$ on tasaisesti integroituva ja $Y_n(\omega) \to \widetilde{Y}(\omega)$ $P$-melkein varmasti, seuraa samasta lauseesta että $E_P(|Y_n - \widetilde{Y}|) \to 0$. Kolmion epäyhtälöstä

$$E_P(|Y - \widetilde{Y}|) \leq E_P(|Y_n - \widetilde{Y}|) + E_P(|Y_n - Y|) \to 0$$

siis $E_P(|Y - \widetilde{Y}|) = 0 \iff Y(\omega) = \widetilde{Y}(\omega)$ $P$-melkein varmasti $\square$.

(b) Laske ehdolliset odotusarvot

$$E_P(Y|\sigma(N))(\omega) \quad \text{ja} \quad E_P(Y|\sigma(X_k : k \in \mathbb{N}))(\omega),$$

ja osoita että nämä satunnaismuuttujat kuuluvat $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ avaruuteen.

**R.** Voidaan kirjoittaa

$$Y(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} |X_k(\omega)| \mathbf{1}(N(\omega) \geq k) = \Phi((X_k(\omega)), N(\omega))$$

jossa $\Phi : (\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}) \to \mathbb{R}^+$ on mitallinen kuvaus.

$$E_P\big(Y\big|\sigma(N)\big)(\omega) = E_P\big(\Phi((X_k), N)\big|\sigma(N)\big)(\omega) = E_P\big(\Phi((X_k), n)\big)\Big|_{n=N(\omega)}$$

$$= E_P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)\Bigg|_{n=N(\omega)} = \left\{\sum_{k=1}^{n} E_P(X_k)\right\}\Bigg|_{n=N(\omega)} = 0$$

$$E_P\big(Y\big|\sigma(X_k : k \in \mathbb{N})\big)(\omega) = E_P\big(\Phi((X_k), N)\big|\sigma(X_k : k \in \mathbb{N})\big)(\omega)$$

$$= E_P\big(\Phi((x_k), N)\big)\Bigg|_{(x_k)=(X_k(\omega))} = E_P\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k \mathbf{1}(k \leq N)\right)\Bigg|_{(x_k)=(X_k(\omega))}$$

$$= \left\{\sum_{k=1}^{\infty} x_k P(k \leq N)\right\}\Bigg|_{(x_k)=(X_k(\omega))} = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} x_k (1-p)^{k-1}\right\}\Bigg|_{(x_k)=(X_k(\omega))}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} X_k(\omega)(1-p)^{k-1}$$

jossa sarja suppenee $P$-melkein varmasti

$$E_P\left(\sum_{k=1}^{\infty} |X_k(\omega)|(1-p)^{k-1}\right) = (Fubini)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_P(|X_k(\omega)|)(1-p)^{k-1} = E_P(|X_1|)E_P(N) = E_P(|X_1|)\, p^{-1} < \infty$$

ja myös $L^2(P)$ mielessä koska

$$E\left(\sum_{k=1}^{\infty}\{X_k(\omega)\}^2(1-p)^{2(k-1)}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} E_P(X_k(\omega)^2)(1-p)^{2(k-1)} =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{2(k-1)} = (1-(1-p)^2)^{-1} < \infty$$

(c) Laske ehdolliset odotusarvot

$$E_P(Y^2|\sigma(N))(\omega) \quad \text{ja} \quad E_P(Y^2|\sigma(X_k : k \in \mathbb{N}))(\omega),$$

ja osoita että nämä satunnaismuuttujat kuuluvat $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ avaruuteen.

**R.**

$$E_P\big(Y^2\big|\sigma(N)\big)(\omega) = E_P\big(\Phi((X_k), N)^2\big|\sigma(N)\big)(\omega) = E_P\big(\Phi((X_k), n)^2\big)\Big|_{n=N(\omega)}$$
$$= E_P\left(\left\{\sum_{k=1}^{n} X_k\right\}^2\right)\Bigg|_{n=N(\omega)} = \left\{\sum_{k=1}^{n} E_P(X_k^2) + 2\sum_{k=1}^{n}\sum_{1\le h<k} E_P(X_h)E_P(X_k)\right\}\Bigg|_{n=N(\omega)}$$
$$\sum_{k=1}^{N(\omega)} E_P(X_k^2) = N(\omega)$$

$$E_P\big(Y^2\big|\sigma(X_k : k \in \mathbb{N})\big)(\omega) = E_P\big(\Phi((X_k), N)^2\big|\sigma(X_k : k \in \mathbb{N})\big)(\omega)$$
$$= E_P\big(\Phi((x_k), N)^2\big)\Big|_{(x_k)=(X_k(\omega))} = E_P\left(\left\{\sum_{k=1}^{\infty} x_k \mathbf{1}(k \le N)\right\}^2\right)\Bigg|_{(x_k)=(X_k(\omega))}$$
$$= \left\{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 P(k \le N) + 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{1\le h<k} x_k x_h P\big(\{k \le N\} \cap \{h \le N\}\big)\right\}\Bigg|_{(x_k)=(X_k(\omega))}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} X_k(\omega)^2 P(k \le N) + 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{1\le h<k} X_k(\omega)X_h(\omega)P(k \le N)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} X_k(\omega)^2 (1-p)^{k-1} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{1\le h<k} X_k(\omega)X_h(\omega)(1-p)^{k-1}$$

Seuraa ehdollisen odotusarvon ominaisuuksista että

$$E_P\Big(E_P\big(Y^2\big|\sigma(X_k : k \in \mathbb{N})\big)\Big) = E_P\Big(E_P\big(Y^2\big|\sigma(N)\big)\Big) = E(Y^2) = E(N) = p^{-1} < \infty$$

(d) Laske odotusarvot $E_P(Y)$, $E_P(Y^2)$.

**R.**

$$E_P(Y) = E_P\Big(E_P\big(Y\big|\sigma(X_k : k \in \mathbb{N})\big)\Big) = E_P\Big(E_P\big(Y\big|\sigma(N)\big)\Big) = 0$$

$$
\begin{aligned}
&E_P(Y^2) = E_P\Big(E_P\big(Y^2\big|\sigma(X_k : k \in \mathbb{N})\big)\Big) = E(N) = p^{-1} \\
&= E_P\Big(E_P\big(Y^2\big|\sigma(N)\big)\Big) = E_P\Big(\sum_{k=1}^{\infty} X_k^2(1-p)^{k-1} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{1\le h<k} X_k X_h (1-p)^{k-1}\Big) = \\
&\sum_{k=1}^{\infty} E_P(X_k^2)(1-p)^{k-1} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{1\le h<k} E_P(X_k)E_P(X_h)(1-p)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1} \\
&= E_P(N) = p^{-1}
\end{aligned}
$$

3. Olkoon $(X_t(\omega) : t \in \mathbb{N})$ $\mathbb{R}^d$-arvoinent Markovin ketju jolla on alkujakauma $P(X_0 \in B) = \pi(B)$ ja siirtymä ydin $K(x, B)$ joka on todennäköisyysydin. Tässä $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ja $x \in \mathbb{R}^d$.

   Se tarkoittaa että $\forall t,\ B_0, B_1, \ldots, B_t \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$$
\begin{aligned}
&P(X_0 \in B_0, X_1 \in B_1, \ldots, X_t \in B_t) = \\
&\int_{B_0}\int_{B_1}\int_{B_2} \cdots \int_{B_t} K(x_{t-1}, dx_t) \ldots K(x_1, dx_2)K(x_0, dx_1)\pi(dx_0)
\end{aligned}
$$

   Määritellään operaattori

$$
(Kf)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)K(x, dy) = E_x(f(X_1))
$$

   Huomataan että kuvaus $x \mapsto (Kf)(x)$ on mitallinen. Tämä seuraa koska se on tosi silloin kun $f(x) = \mathbf{1}_A(x)$ ja $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, koska sillon $Kf(x) = K(x, A)$ joka on mitalllinen $x$:n suhteen koska $K$ on siirtymäydin. Koska $f(x) \ge g(x) \forall x \implies (Kf)(x) \ge (Kg)(x)$, monotonisen konvergenssi lauseen avulla tai monotonisen luokan argumentilla väite seuraa yleisessä tapauksessa.

   (a) Osoita että kun $f(x)$ on mitallinen ja rajoitettu, olkoon $M_0(f) = 0$, ja

$$
M_t(f) = \sum_{s=1}^{t}\big(f(X_s) - (Kf)(X_{s-1})\big)
$$

   on martingaali filtraatiossa $\mathbb{F} = (\ \mathcal{F}_t : t \in \mathbb{N}\})$ jossa $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s = 0, 1, \ldots, t)$.

   **R** Huomataan ensin että Markovin ominaisuus on voimassa:

$$
E_P(f(X_t)|\ \mathcal{F}_{t-1}) = E_P(f(X_t)|X_0, X_1, \ldots X_{t-1}) = E_P(f(X_t)|X_{t-1})
$$

koska

$$
\begin{aligned}
&E_P(f(X_t)\mathbf{1}(X_0 \in B_0, \dots, X_{t-1} \in B_{t-1}) = \\
&\int_{B_0}\int_{B_1}\dots\int_{B_{t-1}}\int_{\mathbb{R}^d} f(X_t)K(x_{t-1}, dx_t)K(x_{t-2}, dx_{t-1})\dots K(x_0, dx_1)\pi(dx_0) \\
&= \int_{B_0}\int_{B_1}\dots\int_{B_{t-1}} (Kf)(x_{t-1})K(x_{t-2}, dx_{t-1})\dots K(x_0, dx_1)\pi(dx_0) \\
&= E_P((Kf)(X_{t-1})\mathbf{1}(X_0 \in B_0, \dots, X_{t-1} \in B_{t-1}) \\
&= E_P(E_P(f(X_t)|X_{t-1})\mathbf{1}(X_0 \in B_0, \dots, X_{t-1} \in B_{t-1})
\end{aligned}
$$

joka osoittaa että

$$E_P(f(X_t)|X_0, X_1, \dots X_{t-1}) = (Kf)(X_{t-1}) = E_P(f(X_t)|X_{t-1})$$

jossa viimeinen yhtälö seuraa koska $(Kf)(X_{t-1})$ on $\sigma(X_{t-1})$-mitallinen. Siksi

$$E(M_t(f)|\mathcal{F}_{t-1}) = M_{t-1}(f)$$

ja $M_t(f)$ on $(P, \mathbb{F})$-martingaali.

(b) Laske Doobin martingaali hajotelma

$$f(X_t) = f(X_0) + M_t(f) + A_t(f)$$

jossa $A_t(f)$ on ennustettava $\mathbb{F}$ suhteen, eli $\forall t \in \mathbb{N}$, $A_t(f)$ on $\mathcal{F}_{t-1}$-mitallinen.

$$
\begin{aligned}
&f(X_t) = f(X_0) + \sum_{s=1}^{t}\big\{f(X_s) - f(X_{s-1})\big\} \\
&= f(X_0) + \sum_{s=1}^{t}\big\{f(X_s) - Kf(X_{s-1})\big\} + \sum_{s=1}^{t}\big\{(Kf)(X_{s-1}) - f(X_{s-1})\big\} \\
&= f(X_0) + M_t(f) + A_t(f)
\end{aligned}
$$

4. Osoita Fatou lemma ehdollisille odotusarvolle: jos $0 \le X_n(\omega)$,

$$0 \le E_P(\liminf X_n|\mathcal{G})(\omega) = \liminf_n E_P(X_n|\mathcal{G})(\omega)$$

5. Olkoon $X(\omega)$ ja $Y(\omega)$ $P$ riippumattomia ja tasaisesti jakautuneita välissä $[0,1]$, siis

$$P(X \in dx, Y \in dy) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x)\ \mathbf{1}_{[0,1]}(y)\ dx\ dy$$

Olkoon $Z(\omega) = \min(X(\omega), Y(\omega))$ ja $I(\omega) = \mathbf{1}(X(\omega) \leq Y(\omega))$

(a) Laske $P(X > Y)$.
**R.**

$$\begin{aligned}
P(X > Y) &= (P_X \otimes P_Y)(X > Y) = E_{P_X \otimes P_Y}(\mathbf{1}_{(X>Y)}) \\
&= \int \mathbf{1}_{(X>Y)} d(P_X \otimes P_Y) \\
&\overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \int \int \mathbf{1}_{(X>Y)} dP_X dP_Y \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{(x>y)} \mathbf{1}_{[0,1]}(y) dy \right) \mathbf{1}_{[0,1]}(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_0^x dy \right) \mathbf{1}_{[0,1]}(x) dx \\
&= \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(b) Laske "elementaarinen" ehdollinen odotusarvon tapahtuman ehdolla

$$E_P(X|X > Y)$$

**R.**

$$\begin{aligned}
E(X|X > Y) &= \frac{E(X\mathbf{1}_{(X>Y)})}{P(X > Y)} \overset{a)}{=} 2E(X\mathbf{1}_{(X>Y)}) \\
&= 2E_{P_X \otimes P_Y}(X\mathbf{1}_{(X>Y)}) \\
&\overset{\perp\!\!\!\perp}{=} 2 \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} x \mathbf{1}_{(x>Y)} dP_Y \right) dP_X \\
&= 2 \int_{\mathbb{R}} \left( x \int_0^x dy \right) dP_X \\
&= 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

(c) Laske ehdollinen odotusarvo

$$E_P(X|\sigma(I))(\omega)$$

**R.**

$$\sigma(I) = \sigma(\{\omega : I = 0\}, \{\omega : I = 1\}) = \sigma(\{X > Y\}, \{X \leq Y\}).$$

$$E(X|\sigma(I))(\omega) = \frac{E(X\mathbf{1}_{(X>Y)})}{P(X > Y)}\mathbf{1}_{(X>Y)}(\omega) + \frac{E(X\mathbf{1}_{(X\leq Y)})}{P(X \leq Y)}\mathbf{1}_{(X\leq Y)}(\omega)$$

Muut termit on jo,

$$\begin{aligned}
E(X\mathbf{1}_{(X\leq Y)}) &= E(X\mathbf{1}_{(X\leq Y)}) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} x\mathbf{1}_{(x\leq y)}) dP_X \right) dP_Y \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_0^y x dx \right) dP_Y \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2} y^2 dy = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Sijoittamalla

$$\begin{aligned}
E(X|\sigma(I))(\omega) &= \frac{2}{3}\mathbf{1}_{(X>Y)} + \frac{1/6}{1 - 1/2}\mathbf{1}_{(X\leq Y)} \\
&= \frac{2}{3}\mathbf{1}_{(X>Y)} + \frac{1}{3}\mathbf{1}_{(X\leq Y)} \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\mathbf{1}_{(X>Y)}
\end{aligned}$$

(d) Laske ehdollinen odotusarvo $E_P(X|\sigma(Z), I)(\omega)$.
**Vihje** Koska

$$Z(\omega)\mathbf{1}(X(\omega) > Y(\omega)) = Y(\omega)\mathbf{1}(X(\omega) > Y(\omega))$$

voit osoitaa ensin (Kolmogorovin määritelmän kautta)

$$\begin{aligned}
&E_P(X|\sigma(Z), \sigma(I))(\omega)\ \mathbf{1}(X(\omega) > Y(\omega)) \\
&= E_P(X|\sigma(Y), \sigma(I))(\omega)\mathbf{1}(X(\omega) > Y(\omega)) \\
&= \frac{E_P(X\mathbf{1}(X > Y)|\sigma(Y))}{P(X > Y|\sigma(Y))(\omega)}\mathbf{1}(X(\omega) > Y(\omega))
\end{aligned}$$

Muistetaan että silloin kun $X$ ja $Y$ ovat $P$-riippumattomia,

$$E_P(f(X,Y)|\sigma(Y))(\omega) = E_P(f(X,y))\Big|_{y=Y(\omega)}$$

**Vihje** Laske ensin $E_P(X|\sigma(Z,I))$, jossa $I(\omega) := \mathbf{1}(X(\omega) \leq Y(\omega))$
ja tietenkin$\sigma(Z,I) \supseteq \sigma(Z)$.

$$E_P(Z|\sigma(Z)) = E_P\big(E_P(X|\sigma(Z,I))\big|\sigma(Z)\big)$$

**R.**

Käyttämällä vihjettä

$$E(X|\sigma(Z),\sigma(I)) = \frac{E(X\mathbf{1}_{(X>Y)}|\sigma(Y))}{P(X>Y|\sigma(Y))}\mathbf{1}_{(X>Y)} + \frac{E(X\mathbf{1}_{(X\leq Y)}|\sigma(Y))}{P(X\leq Y|\sigma(Y))}\mathbf{1}_{(X\leq Y)}.$$

$$\begin{aligned} E(X\mathbf{1}_{(X>Y)}|\sigma(Y)) &\overset{\perp\!\!\perp}{=} E(X\mathbf{1}_{(X>y)})|_{y=Y(\omega)} \\ &= \left(\int_y^1 x dx\right)\Big|_{y=Y(\omega)} = \frac{1}{2}(1-Y^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X\mathbf{1}_{(X\leq Y)}|\sigma(Y)) &\overset{\perp\!\!\perp}{=} E(X\mathbf{1}_{(X\leq y)})|_{y=Y(\omega)} \\ &= \left(\int_0^y x dx\right)\Big|_{y=Y(\omega)} \\ &= \frac{1}{2}Y^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X\leq Y|\sigma(Y)) &= E(\mathbf{1}_{(X\leq Y)}|\sigma(Y)) \\ &\overset{\perp\!\!\perp}{=} E(\mathbf{1}_{(X\leq y)})\Big|_{y=Y(\omega)} \\ &= \left(\int_0^y dx\right)\Big|_{y=Y(\omega)} = Y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X>Y|\sigma(Y)) &= E(\mathbf{1}_{(X>Y)}|\sigma(Y)) \\ &\overset{\perp\!\!\perp}{=} \left(\int_y^1 dx\right)\Big|_{y=Y(\omega)} = 1-Y \end{aligned}$$

Sijoittamalla:

$$
\begin{aligned}
E(X|\sigma(Z), \sigma(I)) &= \frac{\frac{1}{2}(1-Y^2)}{1-Y}\mathbf{1}_{(X>Y)} + \frac{\frac{1}{2}Y^2}{Y}\mathbf{1}_{(X\leq Y)} \\
&= Y + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{(X>Y)}
\end{aligned}
$$