HU, Probability Theory Syksy 2015, Harjoitustehtävät 2 (16.9.2015)

1. Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F})$, additiivinen todennäköisyys P on σ-additiivinen jos ja vain jos kaikille jonoille $(A_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{F}$ jolla $A_n \downarrow \emptyset$, ali $A_n \supseteq A_{n+1}$ ja $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$, seuraa $P(A_n) \downarrow 0$.

   Tämä ei päde äärettömälle mitalle, esimerkiksi Lebesguen mitalle $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ avaruudessa, jolla $\lambda((a, b]) = (b-a)^+$. $\lambda(\mathbb{R}) = +\infty$, kuitenkin Lebesgue mitta on σ-äärellinen. Keksi vastaesimerkki, eli tapahtumien jono $(A_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ jolla $A_n \downarrow \emptyset$ mutta $P(A_n) \not\to 0$.

2. Määritelmän mukaan avaruuden $\Omega = \mathbb{R}^d$ Borelin σ algebra on avomien joukkojen virittämä σ-algebra.

   Kun $t \in \mathbb{R}^d$, olkoon

   $$(-\infty, t] = \{s \in \mathbb{R}^d : \ s_i \le t_i, i = 1, \dots d\}$$

   Osoita että luokka

   $$\mathcal{I} = \left\{(-\infty, q], q \in \mathbb{Q}^d\right\}$$

   on π-luokka joka virittää Borelin σ-algebran.

   Vihje Jos U on avoin $\mathbb{R}^d$:ssa, ja Q on tiheä $\mathbb{R}$:ssa, $\forall x \in U \ \exists r, q \in \mathbb{Q}^d$ jolla $r < q$ (eli $r_i < q_i$ kun $i = 1, \dots, d$

   $$x \in (r, q) := (r_1, q_1) \times (r_2, q_2) \times \cdots \times (r_d, q_d) \subseteq U.$$

3. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäkösyyskolmikko ja $(A_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{F}$ tapahtumien jono jolla $\mathbb{P}(A_n) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

   Osoita: $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 1$.

   Olkoon $(B_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{F}$ jolla $\mathbb{P}(B_n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

   Osoita $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = 0$.

4. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F})$ todennäköisyysavaruus ja tapahtumien jono $(A_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{F}$. Merkitään

   $$\limsup_n A_n := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \ge k} A_k, \quad \liminf_n A_n := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \ge k} A_k,$$

(a) Osoita: $(\limsup_n A_n) \in \mathcal{F}$.

(b) Osoita: $(\liminf_n A_n) = (\limsup_n A_n^c)^c$. jossa $B^c = \Omega \setminus B$ on B-joukon komplementti.

(c) Osoita: $(\liminf_n A_n) \in \mathcal{F}$.

(d) Kun $A \in \mathcal{A}$, olkoon $\mathbf{1}_A(\omega)$ tapahtuman A:n indikaattori-funktio argumentilla $\omega \in \Omega$. Osoita että

$$\mathbf{1}_{(\limsup_n A_n)}(\omega) = \limsup_n \mathbf{1}_{A_n}(\omega), \quad \mathbf{1}_{(\liminf_n A_n)}(\omega) = \liminf_n \mathbf{1}_{A_n}(\omega)$$

(e) Osoita että

$$\limsup_n A_n = \{\omega : \omega \in A_n \text{ äärettömästi usein, eli äärettömille monille } n \ \}$$

$$\liminf_n A_n = \{\omega : \omega \in A_n \text{ lopullisesti , eli kaikille tarpeeksi suurille } n\text{:lle } \}$$

(f) Olkoon $A_n \subseteq B_n \ \forall n$. Osoita että

$$\limsup_n A_n \subseteq \limsup_n B_n, \quad \liminf_n A_n \subseteq \liminf B_n$$

(g) Oletetaan että jollakin todennäköisyydellä $\mathbb{P}$ pätee $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 1$ ja $\mathbb{P}(\liminf_n B_n) = 1$. Osoita että $\mathbb{P}(\limsup_n A_n \cap B_n) = 1$.

5. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F})$ todennäköisyysavaruus todennäköisyysmittojen jonolla $(\mathbb{P}_n : n \in \mathbb{N})$.

   Oletataan että $\forall A \in \mathcal{F}$ raja-arvot

$$\mathbb{P}(A) := \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(A)$$

   ovat olemassa.

   (a) Osoita että kuvaus $\mathbb{P} : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$ on todennäköisyysmitta.

   (b) Silloin, kaikille tapahtumien jonoille $(A_k : k \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{F}$ joilla $A_k \downarrow \emptyset$ pätee

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}_n(A_k) \downarrow 0 \text{ kun } k \uparrow \infty$$