HY Todennäköisyysteoria I syksy 2015, kurssikoe (suomenkielinen) (4.11.2015)

You can choose whether to write the exam in English or in Finnish, the english version of the same exam is also available!

Valitse neljä tehtävää viiden tehtävän listasta $\{\ 1,2,3,4,5\}$ ja vastaa tehtävien kysymyksiin.

Tehtävissä, kaikki satunnaismuuttujat elävät todennäköisyysavaruudessa $(\Omega,\mathcal{F},P)$.

1. Olkoon $X(\omega)$ $\mathbb{R}$-arvoinen satunnaismuuttuja todennäköisyysavaruudessa $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. ja olkoon $F_X(t)=P\big(\{\omega : X(\omega)\le t\}\big)$ sen kertymäfunktio.

   Todista että kerymäfunktiolla on seuraavia ominaisuuksia:

   (a) $F(+\infty) := \lim_{t\to+\infty} F(t)=1$ ja $F(-\infty) := \lim_{t\to-\infty} F(t)=0$

   (b) F on ei-vähenevä, eli $F(s)\le F(t)$ kun $s\le t$.

   (c) F on oikealta jatkuva, eli $F(t+)=\lim_{u\downarrow t} F(u)=F(t) \quad \forall t\in\mathbb{R}$.

   (d) epäjatkuvuus pisteiden joukko

   $$\big\{t : \Delta F(t) = \big(F(t)-F(t-)\big) > 0\big\}$$

   jossa $F(t-)=\lim_{r\uparrow t} F(r)$ on raja-arvo vasemmalta puolelta, on korkeintaan numeroituva.

   Vihje: käytä todennäköisyysmitan σ-additiivisuus rajankäynnissä.

2. Sanotaan että satunnaismuuttujen jono $(X_n : n\in\mathbb{N})$ suppenee stokastisesti (tai todennäköisyysmielessä) kohti X satunnaismuuttujaa, ja merkitään $X_n \stackrel{P}{\to} X$, kun $\forall\eta>0$

   $$\lim_{n\to\infty} P\big(\{|X_n-X|>\eta\}\big)=0$$

   (a) Osoita: kun $X_n \stackrel{L^1(P)}{\to} X$ $L^1(P)$ normissa,
   eli $E_P\big(|X_n-X|\big)\to 0$, siitä seuraa että $X_n \stackrel{P}{\to} X$ (stokastisesti).

   (b) Olkoon $X(\omega),\widetilde{X}(\omega)$ ja $X_n(\omega), n\in\mathbb{N}$ satunnaismuuttujat.

   Osoita :jos $X_n(\omega)\to X(\omega)$ P-melkein varmasti kun $n\uparrow\infty$,

   ja $X_n(\omega) \stackrel{L^1(P)}{\to} \widetilde{X}(\omega)$, (siis $E_P(|X_n-X|)\to 0$ kun $n\uparrow\infty$), silloin seuraa että $\widetilde{X}(\omega) = X(\omega) \quad P$-melkein varmasti.

Vihje Sekä $L^1(P)$ konvergenssista että P-melkein varma konvergenssista seuraa stokastinen konvergenssi. Kaytä stokastisen konvergenssin määritelmä.

3. Olkoot $X, X_1, X_2, \dots, X, \dots,$ ja $Y, Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots,$ satunnaismuuttujia todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Oletetaan, että $X_n \xrightarrow{P} X$ ja $Y_n \xrightarrow{P} Y$ (eli stokastisen konvergenssin mielessä).

   Osoita, että $(X_n + Y_n) \xrightarrow{P} (X + Y)$ (stokastisesti).

   Vihje $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $|a + b| > \eta \Longrightarrow |a| > \eta/2$ tai $|b| > \eta/2$

   Vihje for $a, b \in \mathbb{R}$, $|a + b| > \eta \Longrightarrow |a| > \eta/2$ or $|b| > \eta/2$

4. Olkoon $U(\omega), V(\omega)$ P-riippumattomia satunnaismuuttujia joilla $\forall s, t \in [0, 1]$,

$$P(U \le s, V \le t) = st$$

   (a) Osoita että U ja V ovat P-riippumattomia ja tasaisesti jakautuneita välissä $[0, 1]$.

   (b) Olkoon $X(\omega) = U(\omega)V(\omega)$. Osoita että kuvaus $\omega \mapsto X(\omega)$ on satunnaismuuttuja ja laske X satunnaismuuttuja kertymäfunktio

$$F_X(t) = P(X \le t) = P(UV \le t)$$

   Vihje: kaikille rajoitetuille ja Borel mitallisille testi funktioille $g(u, v)$ pätee

$$E_P\big(g(U, V)\big) = \int_0^1 \int_0^1 g(u, v) du dv$$

   (c) Laske X todennäköisyysjakauman tiheysfunktio.

   (d) Laske odotusarvo $E_P(X)$ (Vihje: voit laskea ensin $E_P(U) = E_P(V)$ ja käyttää satunnaismuuttujen riippumattomuustta).

5. Olkoon $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ P-riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuttujia joilla $P(X_n(\omega) \ge 0) = 1$ and $E_P(X_n) = \infty$.

   Tästä seuraa että, $\forall K > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > Kn) = \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1| > Kn) = \infty$$

(tämä seuraa Fubini lauseesta mutta sinun ei tarvitse nyt sitä osoittaa).

Osoita Borel Cantelli lemman nojalla (kumpi ?), että P-almost surely

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_1(\omega) + X_2(\omega) + \cdots + X_{n-1}(\omega) + X_n(\omega)}{n} = +\infty$$