HY Todennäköisyysteoria I syksy 2015, kurssikoe (suomenkielinen) (29.11.2015)

You can choose whether to write the exam in English or in Finnish, the english version of the same exam is also available!

Valitse neljä tehtävää viiden tehtävän listasta $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ja vastaa tehtävien kysymyksiin.

Tehtävissä, kaikki satunnaismuuttujat elävät todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

1. Muistetaan monotonisen konvergenssin lause:

   Jos satunnaismuuttujen jonolle pätee $0 \le X_n(\omega) \uparrow X(\omega)$ P-melkein varmasti kun $n \to \infty$, siitä seuraa $E_P(X_n) \uparrow E_P(X) \in [0, +\infty]$.

   (a) Todista Fatou'n lemma monotonisen konvergenssin lauseen perusteella, eli kun satunnaismuuttujen jono $X_n(\omega) \ge 0$ P-melkein varmasti $\forall n \in \mathbb{N}$, siitä seuraa

   $$E_P\big(\liminf_n X_n\big) \le \liminf_n E_P\big(X_n\big)$$

   (b) Käänteis-Fatou lemma koskee $\limsup_n X_n(\omega)$,

   $$E_P\big(\limsup_n X_n\big) \ge \limsup_n E_P(X_n)$$

   mutta millä oletuksilla se pätee ? Todista käänteis-Fatou lemma.

   (c) Olkoon $\{ X_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\}$ ja $X(\omega)$ satunnaismuuttujat jolla

   $$\lim_{n \to \infty} X_n(\omega) = X(\omega) \qquad P\text{-melkein varmasti} \tag{0.1}$$

   Esitä riittävä ehto odotusarvojen konvergenssille $E_P(X_n) \to E_P(X)$. Esitä myös vastaesimerkki jossa $\lim_{n \to \infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ P-melkein varmasti mutta $E_P(X_n)$ ei suppene kohti $E_P(X)$.

2. Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, olkoon $G(\omega)$ standardi Gaussinen satunnaismuuttuja jolla on kertymäfunktio

   $$\Phi(t) = P(G \le t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \tag{0.2}$$

(a) Laske odotusarvo $E_P\Big(\exp\big(G^2\lambda/2\big)\Big) \in [0,+\infty]$ kun $\lambda \in \mathbb{R}$.

Vihje Koska $\Phi(t)$ on todennäköisyysjakauman kertymäfunktio, $\Phi(+\infty) = 1$ ja

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big)dx = \sqrt{2\pi}\ . \tag{0.3}$$

(b) Laske sitten oikean puolen yläraja Chentsovin epäyhtälossa.

$$P(|G| \geq t) = P\Bigg(\exp\Big(\frac{\lambda\ G^2}{2}\Big) \geq \exp\Big(\frac{\lambda\ t^2}{2}\Big)\Bigg) \quad \forall \lambda > 0$$
$$\Longrightarrow P(|G| \geq t) \leq \inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\Bigg\{\exp\Big(-\frac{\lambda t^2}{2}\Big)E_P\Big(\ \exp\Big(\frac{\lambda G^2}{2}\Big)\Big)\Bigg\}$$

Vihje Etsi funktion minimin derivoimalla funktion tai funktion logaritmin.

3. Olkoon $\varepsilon > 0$, ja $(X_n(\omega) \in \mathbb{N})$ jono satunnaismuuttujia (ei välttämättä riippumattomia !) jolla

$$P\Big(X_n = (n^{(1+\varepsilon)} - 1)\Big) = n^{-(1+\varepsilon)} = 1 - P\big(X_n = -1\big)$$

Pelin tulkinta: X_n on pelaajan voitto arpajaisissa jossa arpalippu maksaa 1 €, ja voitetaan $n^{(1+\varepsilon)}$ € todennäköisyydellä $n^{-(1+\varepsilon)}$.

(a) Osoita: $E_P(X_n) = 0$

(b) Osoita :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+\varepsilon)} \begin{cases} = \infty & \text{kun } \varepsilon \leq 0 \\ < \infty & \text{kun } \varepsilon > 0 \end{cases}$$

(c) Olkoon $S_n(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + \cdots + X_n(\omega)$. Osoita että todennäköisyydellä $P = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = -1$$

Vihje: käytä Borel Cantellin lemma (kumpi ?).

Eli vaikka peli on odotusarvon mielessä reilu, pelaaja joka jatkaa pelaamaan lopulta häviää pystyyn!

4. Muistetaan satunnaismuuttujen jonon $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ stokastisen konvergenssin määritelmä:

$$X_n \xrightarrow{P} 0 \quad \Longleftrightarrow \forall \eta > 0, \lim_{n\to\infty} P\big(|X_n| > \eta\big) = 0$$

Osoita:

(a) Jos $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = 0$ P-melkein varmasti, siitä seuraa $X_n \xrightarrow{P} 0$ (stokastisesti).

(b) Jos $X_n \xrightarrow{P} 0$ (stokastisesti), on olemassa deterministinen alijono $(n_k : k \in \mathbb{N})$ jolla $\lim_{k\to\infty} X_{n_k}(\omega) = 0$ P-melkein varmasti.
Vihje Muista Borel Cantellin lemma.

(c) Jos $X_n \xrightarrow{L^q} 0$, eli $\lim_{n\to\infty} E_P\big(|X_n|^q\big) = 0$ jossa $q > 0$, siitä seuraa $X_n \xrightarrow{P} 0$ (stokastisesti).
Vihje Muista Chebychevin epäyhtälö.

(d)

$$X_n \xrightarrow{P} 0 \text{ (stokastisesti)} \Longleftrightarrow d(X_n, 0) := E_P\left(\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\right) \longrightarrow 0 \text{ kun } n \to \infty$$

Vihje Kuvaus $f : \mathbb{R}^+ \to [0,1]$ jolla $f(x) = x/(1+x)$ on aidosti kasvava.

5. Olkoon $N(\omega)$ satunnaismuuttuja joka on Poisson jakautunut parametrilla $\lambda > 0$, eli

$$\mathbb{P}(\{\omega : N(\omega) = k\}) = P_\lambda(\{k\}) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}$$

(a) Osoita että $(P_\lambda(\{k\}) : k \in \mathbb{N})$ on todennäköisyysjakauma avaruudessa $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, ja $P_\lambda(\mathbb{N}) = 1$.

(b) Laske *momentti-generoiva funktio*

$$m(\theta) = E_{\mathbb{P}}\big(\exp(\theta N)\big), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

(c) Osoita *Steinin yhtälö* Poissonin jakaumalle:

$$\lambda E_{\mathbb{P}}(g(N+1)) = E_{\mathbb{P}}(N g(N)) \ .$$

jossa $(g(k) : k \in \mathbb{N}) \subseteq \mathbb{R}$ on deterministinen jono.