HY Todennäköisyysteoria, syksy 2015, laskuharjoitukset 1 (9.9.2015)

1. Olkoon $\Omega = [0, 1] \cap \mathbb{Q} = \{r \text{ rationaalinen} : 0 \leq r \leq 1 \}$.

   Olkoon $\mathcal{A}$ kokoelma joukoista joilla on esitys äärellisenä yhdistenä joukoista $(a, b] \cap \mathbb{Q}$, $[a, b] \cap \mathbb{Q}$,$(a, b) \cap \mathbb{Q}$, tai $[a, b) \cap \mathbb{Q}$, jossa $0 \leq a \leq b \leq 1$.

   Määritellään $\forall 0 \leq a \leq b \leq 1$

   $$P((a, b] \cap \mathbb{Q}) = P([a, b] \cap \mathbb{Q}) = P((a, b) \cap \mathbb{Q}) = P([a, b) \cap \mathbb{Q}) = b - a,$$

   - Osoita että $\mathcal{A}$ on algebra, eli $\Omega \in \mathcal{A}$, jos $A \in \mathcal{A}$ myos $A^c := (\Omega \setminus A) \in \mathcal{A}$ ja jos $A, B \in \mathcal{A}$ myös $A \cup B \in \mathcal{A}$.
   - Laajenna P joukkofunktio äärellisesti addiitiiviseksi mitaksi koko algebralle $\mathcal{A}$.
   - Osoita että kyseinen additiivinen mitta P ei ole σ-additiivinen.

   Vihje Tässä tapauksessa $\Omega = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ on numeroituva !.

2. Olkoon Ω mielivaltainen jouokko , ja sen alijoukkojen kokoelma

   $$\mathcal{A} = \Big\{ A \subseteq \Omega : \ A \text{ vai sen komplementti } A^c = \Omega \setminus A \text{ on äärellinen } \Big\}$$

   - Osoita että $\mathcal{A}$ on algebra mutta ei ole σ-algebra.
   - Kun $A \in \mathcal{A}$, määritellään kuvaus $Q(A) = 0$ jos A on äärellinen ja $Q(A) = 1$ jos A on ääretön. Osoita että Q on äärellisesti additiivinen $\mathcal{A}$ algebrassa mutta ei ole σ-additiivinen.

3. Olkoon Ω mielivaltainen joukko, 2^Ω merkitsee sen potenssijoukko, eli Ω:n alijoukkojen kokoelma. Määritellään alijoukkojen $A, B \subseteq \Omega$, *symmetrinen erotus*

   $$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{\omega : \omega \in A \text{ vai } \omega \in B \text{ mutta ei molemmissa } \}$$

   Näytä että potenssijoukko 2^Ω on **rengas** operatioiden Δ (summa) ja $\cap$ (tulo) suhteen. Eli

   - Esitä identiteetti jäsen Δ:n operaation suhteen,
   - Esitä identiteetti $\cap$:n operaation suhteen,
   - osoita että jokaisella jäsenillä on additiivinen inverssi,

- osoita että Δ on assosiatiivinen ja distributiivinen ominaisuus on voimassa.

Vihje : indikaattorille pätee

$$\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B, \quad \mathbf{1}_{A\cup B} = 1_A + 1_B - 1_A 1_B$$
$$\mathbf{1}_{(A\Delta B)} = \big(\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B\big) \bmod 2 = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2\times \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B = 1_A \mathbf{1}_{B^c} + \mathbf{1}_B \mathbf{1}_{A^c}$$

4. Olkoon $\{\mathcal{G}_\alpha : \alpha \in \mathcal{I}\}$ saman joukon Ω:n σ-algebrien kokoelma jossa $\mathcal{I}$ on mielivaltainen indeksi-joukko.

   Osoita että leikkaus

   $$\mathcal{G} := \bigcap_{\alpha\in\mathcal{I}} \mathcal{G}_\alpha$$

   on σ-algebra.

5. Tehtävä numeroituvuudesta:

   (a) Osoita: tauluun$=[0,1]^2$ mahtuu ylinumeroituva määrä erillisiä nolla-merkin='O' eli ympyrän muotoisia käyriä, (siis ympyrä-käyrät saavat olla myös sisäkkäisiä kun eivät koske toisiaansa).

   (b) Osoita että taulussa $= [0,1]^2$ tai vaikka $= \mathbb{R}^2$ avaruudessa mahtuu korkeintaan numeroituva määrää erillisiä '8' eli '∞'-merkkin muotoisia käyriä (siis '8'- muotoisia käyrät saavat olla myös sisäkkäisiä kun eivät koske toisiaansa).