Osittaisdifferentiaaliyhtälöt
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2015
Harjoitus 9

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: ma 09.11.2015 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: ma 16.11.2015 klo 19.30

Tehtäväsarja I

1. Oletetaan, että funktio u on sileä, ja toteuttaa lämpöyhtälön $u_t - \Delta u = 0$. Osoita, että myös funktio
$$v(x,t) = \langle x, \nabla u(x,t)\rangle + 2tu_t(x,t)$$
on lämpöyhtälön ratkaisu.

2. Osoita ns. *Weierstrassin aproksimaatio teoreema*: suljetulla välillä $[a,b]$ jatkuvaa funktiota f voidaan aproksimoida tasaisesti polynomeilla. **Vihje**: Jatka f jatkuvaksi funktioksi koko reaaliakselille, ja ratkaise lämpöyhtälö tällä alkuarvolla. Kehitä tämän jälkeen lämpöydin potenssisarjaksi.

3. Osoita, että alkuarvo–ongelman
$$u_t - u_{xx} = 0 \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+\text{:ssä},$$
$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$
eräs ratkaisu on
$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(1 + E(x/\sqrt{4t})\right),$$
missä ns. Virhefunktio E on määritelty kaavalla
$$E(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s e^{-r^2}\,dr.$$

4. Oletetaan, että u on sileä, positiivinen funktio joka toteuttaa yksiulotteisen lämpöyhtälön
$$u_t - \mu u_{xx} = 0,$$
missä vakio μ on positiivinen. Osoita, että funktio
$$v = -2\mu u_x/u$$
toteuttaa ns. Burgersin yhtälön
$$v_t + vv_x = \mu v_{xx}.$$

5. Oletetaan, että funktiot $u_i(s,t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, d$, toteuttavat yksiulotteisen lämpöyhtälön $v_t + v_{ss} = 0$. Osoita, että funktio
$$u(x,t) = u_1(x_1,t) \cdots u_d(x_d,t) = \Pi_{i=1}^d u_i(x_i,t)$$
toteuttaa d–ulotteisen lämpöyhtälön.

Tehtäväsarja II

Seuraavia tehtäviä varten perehdy Fourier–analyysin Cesáro–summausta käsitteleviin kohtiin

1. Kuinka määritellään 2π–periodisen funktion Cesáro–summa?
2. Selitä intuitiivsesti, miten Cesáro–summaaminen eroaa Fourier–sarjan summaamisesta käyttäen osasummia ja Dirichlet–ydintä.
3. Muotoile ja todista jatkuvan 2π–periodisen funktion Cesáro–summan konvergenssia koskeva lause.