Osittaisdifferentiaaliyhtälöt
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2015
Harjoitus 7

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: ma 02.11.2015 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: ma 09.11.2015 klo 19.30

Tehtäväsarja I

Seuraavissa tehtävissä viemme loppuun Perronin konstruktion Dirichlet–ongelman ratkaisulle.

1. Tutustu DiBenedetton kirjan Korollaarin 2.5.1 (Harnackin epäyhtälö) ja täydennä sen todistuksen puuttuvat yksityiskohdat.

2. Oletetaan, että (v_n) on kasvava jono ei–negatiivisia harmonisia funktioita kuulassa $B_r(x_0)$. Oletetaan, että on olemassa äärellinen raja–arvo $\lim_{n\to\infty} v_n(x_0)$. Osoita, että jono $v_n(x)$ suppenee kohti äärellistä raja–arvoa jokaisessa pisteessä $x \in B_r(x_0)$.

3. Edellisen kohdan oletuksin, osoita, että jono (v_n) on yhtäjatkuva $B_r(x_0)$:n kompakteissa osajoukoissa. **Vihje**: Sovella Poissonin kaavaa sopivassa kuulassa $B_\rho(x_0)$, $\rho < r$, ja arvioi derivaattoja tämän avulla.

4. Osoita, että on olemassa kuulassa $B_r(x_0)$ jatkuva raja-funktio
$$u(x) = \lim_{n\to\infty} v_n(x).$$

5. Osoita, että edellä määritelty u on harmoninen kuulassa $B_r(x_0)$.

Tehtäväsarja II

Seuraavia tehtäviä varten tutustu DiBenedetton kirjan lukuihin 5.10 ja 5.11.

1. Kuinka määritellään ratkaisun $u(x,t)$ alkuarvo hetkellä $t = 0$ L^2–normin suhteen?

2. Oletetaan, että $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ on rajoitettu, ja $u \in C^{2,1}(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ on reuna–alkuarvo–ongelman
$$\partial_t u - \Delta u = 0 \text{ in } \Omega \times \mathbb{R}_+,\ u|_{t=0} = u_0,\ u|_{\partial\Omega\times\mathbb{R}_+} = 0,$$
ratkaisu, missä $u_0 \in C_0^1(\Omega)$. Osoita, että kaikilla $t > 0$ pätee *Energiaidentiteetti*
$$\frac{1}{2}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \int_\Omega |\nabla_x u|^2\,dx\,dt = 0.$$

3. Oletetaan, että yllä $u_0 = 0$. Mitä voit sanoa ratkaisusta u?