Osittaisdifferentiaaliyhtälöt
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2015
Harjoitus 7

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: ma 26.10.2015 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: ma 02.11.2015 klo 19.30

Tehtäväsarja I

Seuraavat neljä ovat kertausluonteisia, ja antavat esimakua siitä millaisia kysymyksiä ensimmäisessä kurssikokeessa on odotettavissa.

1. Oletetaan, että $\nabla \cdot a(x)\nabla u(x) > 0$ alueessa Ω, ja että $a \in C^1(\Omega)$ on positiivinen, Osoita, ettei funktiolla u voi ollla lokaalia maksimia Ω:n sisäpisteissä.

2. Muotoile Harnackin epäyhtälö Laplace–yhtälön ratkaisuille, ja todista se.

3. Määritä kaikki korkeintaan astetta kolme olevat harmoniset kahden muuttujan polynomit

4. Osoita, että funktio
$$f(x) = \frac{\sin(k|x|)}{|x|}$$
on Helmholtz–yhtälön
$$(\Delta + k^2)u = 0$$
C^2–ratkaisu koko $\mathbb{R}^3$.ssa. Päteekö aina maksimiperiaate Helmoltz–yhtälön ratkaisulle?

Tehtäväsarja II

Jatkamme Ascoli–Arzélan lauseen todistusta.

5. Osoita, että täydellisen metrisen avaruuden suljetu ja täysin rajoitettu osajoukko on kompakti.

Edellisen harjoituksen, ja kuudensien harjoitusten tehtävien 3 ja 4 nojalla olemme nyt osoittaneet, että täydellisessä metrisessä avaruudessa kompaktit joukot ovat täsmälleen samoja kuin suljetut ja täysin rajoitetut osajoukot.

Olkoon nyt X kompakti topologinen avaruus, ja $C(X)$ jatkuvien funktioiden $X \to \mathbb{C}$ muodostama vektoriavaruus. Pidetään tunnettuna, että varustettuna sup–normilla
$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|,$$
on $C(X)$ täydellinen normiavaruus, eli *Banach–avaruus*. Olkoon nyt $\Phi \subset C(X)$ osajoukko, joka on *pisteettäin rajoitettu*, eli jokaisella $x \in X$
$$\sup\{|f(x)]; \ f \in \Phi\} < \infty,$$
ja yhtäjatkuva, eli kaikilla $\varepsilon > 0$ ja kaikilla $x \in X$ on olemassa x:n ympäristö V siten että jokaisella $f \in \Phi$ pätee
$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{kaikilla } y \in V.$$

6. Osoita, että joukko Φ on *tasaisesti rajoitettu*, eli että on olemassa vakio $M \in \mathbb{R}$ siten että

$$\sup\{|f(x)|;\ f \in \Phi\ x \in X\} \leq M.$$

7. Osoita, että joukko Φ on täysin rajoitettu.

8. (Ascoli–Arzéla) Osoita, että Φ:n jokaisella jonolla on osajono, joka suppenee tasaisesti kohti jotain $C(X)$:n alkiota