Osittaisdifferentiaaliyhtälöt
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2015
Harjoitus 6

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: ma 12.10.2015 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: ma 19.10.2015 klo 19.30

Tehtäväsarja I

1. Osoita, että jatkuva funktio v on subharmoninen avoimessa joukossa Ω jos ja vain jos jokaisessa rajoitetussa avomessa osajoukossa $\Omega' \subset \Omega$ ja jokaiselle Ω':ssa harmoniselle ja reunalle asti jatkuvalle funktiolle u, jolle $u|_{\partial\Omega'} = v_{\partial\Omega'}$, pätee $v \leq u$ Ω':ssa.

2. Olkoon $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *epähomogeenisen* Dirichlet–ongelman
$$\Delta u = -1 \quad \Omega\text{:ssa}, \; u|_{\partial\Omega} = 0$$
ratkaisu. Osoita, että
$$u(x) \geq \frac{1}{2d} \inf_{y \in \partial\Omega} |x-y|^2 \quad \text{kaikilla } x \in \Omega.$$

Tehtäväsarja II

Seuraavaksi jatkamme Ascoli-Arzélan lauseen todistusta.

3. Osoita, että jos metrisen avaruuden osajoukko K on kompakti, niin jokaisella sen äärettömällä osajoukolla on kasaantumispiste K:ssa.

4. Sanomme, että metrisen avaruuden osajoukko K on *täysin rajoitettu*, jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa K:n äärellinen peite avoimille ε–säteisillä kuulilla. Osoita, että jos jokaisella K:n äärettömällä osajoukolla on kasaantumispiste K:ssa, niin se on täysin rajoitettu.

Tehtäväsarja III

5. Oletetaan, että $f \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$ ja olkoon Φ Laplace–operattorin perusratkaisu $\mathbb{R}^d$:ssä. Määritellään
$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x-y) f(y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{1}$$
Osoita, että $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$.

6. Olkoon f kuten edellisessä tehtävässä, ja määritellään u edelleen kaavalla (1). Osoita, että
$$\Delta u = f \quad \mathbb{R}^d\text{:ssä}.$$

Tehtäväsarja IV

Lue DiBenedetton kirjasta sivut 135-140.

7. Osoita, että jos $t > 0$, niin
$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2/4t}\, dx = (4\pi t)^{d/2}.$$

8. Selitä, kuinka lämpöyhtälön ratkaisujen maksimiperiaate eroaa harmonisten funktioiden vastaavasta.