Osittaisdifferentiaaliyhtälöt
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2015
Harjoitus 5

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: ma 05.10.2015 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: ma 12.10.2015 klo 19.30

Tehtäväsarja I

1. Tutki Dirichlet'n ongelmaa

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } B_R(0)$$

$$u|_{\partial B_R} = \begin{cases} 0, & \text{jos } x_d < 0 \\ 1, & \text{jos } x_d \geq 0 \end{cases} .$$

Vihje: Vaikkei reuna–arvo ole jatkuva, voit silti yrittää käyttää Poisson-integraalia. Tutki käytöstä epäjatkuvuuskohdissa erikseen.

2. Keksitkö, kuinka voit määrittää puolipallon

$$B_R(0)^+ = B_R(0) \cap \mathbb{R}^d_+$$

Dirichlet–Greenin funktion Laplace–operaattorille?

Tehtäväsarja II

3. Oletetaan, että $u \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ avoin, toteuttaa Helmholtz–yhtälön

$$\Delta u - u = 0.$$

Osoita, että u:lla ei voi olla postiviista lokaalia maksimia eikä negatiivista lokaalia minimiä.

4. Oletetaan että u on harmoninen. Osoita, että $|\nabla u|^2$ on subharmoninen.

Tehtäväsarja III

Tätä tehtäväkokoelmaa varten tutustu DiBenedeton kirjan lukuun 2.6, *The Dirichlet Problem.*

5. Seiltä omin sanoin, mitä sivulla 55 määritelty ehto *exterior sphere condition*, eli palloehto ulkoalueelle, tarkoittaa.

6. Anna esimerkkejä alueista, joilla tämä ehto pätee, ja vastaavasti ei päde.

Tehtäväsarja IV

Todistamme Dirichlet–ongelman ratkevuuden ns. Perronin menetelmällä. Todistuksessa tarvitsemme Ascoli-Arzelan lausetta. Tätä emme luennoilla todista, mutta tämän ja ensiviikon harjoitustehtväissä käymme todistuksen pääpiirteissään läpi. Aloitamme lauseen väitteen kannalta keskeisella käsitteellä, eli *yhtäjatkuvuudella.*

7. Lue esim. Evansin Appendix C:n (toisessa painoksessa) lopusta, miten määritellään funktiojonon $\{f_k\}$ *yhtäjatkuvuus*, ja pyri selittämään tämä omin sanoin. Keksitkö esimerkkiä jonosta joka **ei** ole yhtäjatkuva.

8. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ alue. Oletetaan, että $f_k \in C^1(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, ja että derivaatat $\partial_i f_k$ ovat tasaisesti rajoitettuja, eli on olemassa vakio M siten, että

$$|\partial_i f_k(x)| \leq M \quad \text{kaikilla } i \in \{1, \ldots, d\},\ k \in \mathbb{N} \text{ ja } x \in \Omega.$$

Onko jono f_k yhtäjatkuva?