

## Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos

Syksy 2015

Harjoitus 4

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: ma 28.9.2015 klo 19.30

Korjausten viimeinen palautuspäivä: ma 05.10.2015 klo 19.30

### Tehtäväsarja I

Tämän tehtävän tarkoituksena on valoittaa luennoilla läpikäydyn esitysteoreeman todistusta, ja erityisesti sitä, miksi Greenin kaavoja ei saa suoraan soveltaa koko alueessa.

1. Olkoon

$$\phi(x) = |x|, x \in \mathbb{R}.$$

Laske  $\phi'$  ja  $\phi''$

2. Olkoon  $I = [-1, 1]$  ja  $f \in C_0^2(I)$ . Osoita tutkimalla integraalien

$$\int_{I \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} f \phi' dx, \quad \int_{I \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} f' \phi dx$$

raja-arvoja kun  $\varepsilon \rightarrow +0$ , että

$$\int_{I \setminus \{0\}} f \phi' dx = - \int_I f' \phi dx.$$

3. Osoita kuten edellisessä tehtävässä, että yhtälö

$$\int_{I \setminus \{0\}} f \phi'' dx = \int_I f'' \phi dx$$

ei päde. Kuinka voit muokata tätä yhtälöä siten, että se olisi tosi?

### Tehtäväsarja II

4. Osoita, että *Poissonin ydin*

$$K(x, y) = \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^d}$$

on muuttujan  $x$  suhteen harmoninen avoimessa kuulussa  $B_R = \{x \in \mathbb{R}^d; |x| < R\}$  kaikilla  $y \in \partial B_R$ . **Vihje:** Katso DiBenedetton tehtävää 2.3.2 sivulla 74.

5. Osoita, että DiBenedetton kirja sivun 46 kaava

$$-\frac{\partial}{\partial |y|} G(x, y)|_{y \in \partial B_R} = \frac{1}{R \omega_N} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^N}$$

pitää paikkansa. Tässä  $N$  on avaruuden dimensio. **Vihje:** Voit katso apuja myös esim. Evansin kirjan kohdasta 2.2.c).

Seuraavaa tehtäväkokoelmia varten tutustu DiBenedetton kirjan lukuun 2.4, *Subharmonic Functions and the Mean Value Property* ja erityisesti sen kohtaan 2.4.2 *Structure of Sub-harmonic Functions*. Jos et muista, mikä on Jensenin epäyhtälön väite, löydät sen esim. Evansin kirjan Appendix B:stä. Tutustu lisäksi kohtaan 2.5.1, *The Harnack Inequality and the Liouville Theorem*.

### Tehtäväsarja III

6. Onko funktio  $\max\{x_1^2 + x_2^2, x_1^2 - x_2^2\}$  subharmoninen?
7. Onko funktio  $(x_1^2 + x_2^2)^2$  subharmoninen?

### Tehtäväsarja IV

8. Selitä omin sanoin, mitä Harnackin Teoreema (Theorem 2.5.1) sanoo.
9. Selitä omin sanoin, mitä Liouvilien Teoreema (Corollary 2.5.1) sanoo.