

Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos

Syksy 2015

Harjoitus 3

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: ma 21.9.2015 klo 19.30

Korjausten viimeinen palautuspäivä: ma 28.9.2015 klo 19.30

Tehtäväsarja I

1. Oletetaan, että F on C^1 -vektorikenttä ja g on differentioituva reaaliarvoinen funktio. Johda tulon derivointisääntö divergenssille, eli laske $\nabla \cdot (gF)$
2. Oletetaan, että u ja v ovat C^2 -funktioita. Sievennä lauseke $\Delta(uv)$

Tehtäväsarja II

3. Tarkastellaan ns. *Helmholtz-yhtälöä*

$$(\Delta + c)u = 0 \quad \mathbb{R}^3\text{:ssä.}$$

Osoita, että jos u on tämän radiaalinen ratkaisu, eli $u(x) = V(|x|)$, niin funktio V toteuttaa tavallisen differentiaaliyhtälön

$$V'' + \frac{2}{r}V' + cV = 0, \quad r \neq 0. \quad (1)$$

4. Ratkaise yhtälö (1). **Vihje:** etsi ratkaisua aluksi muodossa $V = W/r$, ja johda yhtälö funktiolle W .
5. Todista luentojen esityslausetta (eli DiBenedetton kirjan termin Stokesin identiteetti) Helmholtzin yhtälön ratkaisuille \mathbb{R}^3 rajoitetussa C^2 -alueessa.

Seuraavia tehtäväkokoelmia varten tutustu DiBenedetton kirjan lukuun 2.4, *Subharmonic Functions and the Mean Value Property* ja kohtaan 2.4.1 *The Maximum Principle*

Tehtäväsarja III

6. Missä tasoalueissa seuraavat funktiot ovat harmonisia, subharmonisia tai superharmonisia:

$$x_1^2 + x_2^2, \quad x_1^2 - x_2^2, \quad x_1x_2, \quad x_1^4x_2 + x_1x_2^4?$$

7. Laske integraali

$$\int_{B_1((1,1))} (x_1^4 - 6x_1^2x_2^2 + x_2^4) dS(x),$$

missä $B_1((1,1))$ on yksisäteisen ympyrän kehä, jonka keskipiste on $(1,1)$ **Vihje:** Aloita laskemalla $\Delta(x_1^4 - 6x_1^2x_2^2 + x_2^4)$. Mitä huomaat?

Tehtäväsarja IV

8. Selitä omin sanoin, mitä Maksimiperiaate sanoo harmonisen funktion käytöksestä.
9. Tarkastellaan seuraavaa funktiota:

$$f(x_1, x_2) = x_1x_2$$

tasoalueessa $E = \{(x_1, x_2); x_1 > 0, x_2 > 0\}$. Onko tämä harmoninen? Päteekö maksiperiaatteen väite? Selitä, mistä on kysymys.