Osittaisdifferentiaaliyhtälöt
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2015
Harjoitus 2

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: ma 14.9.2015 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: ma 21.9.2015 klo 19.30

Sanomme, että funktio $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ määrää C^k–joukon U, $k \geq 1$, jos seuraavat ehdot pätevät:

- $h \in C^k(\mathbb{R}^n)$.
- Pätee, että $U = \{x \in \mathbb{R}^n;\ h(x) < 0\}$ ja $\mathbb{R}^n \setminus \overline{U} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ h(x) > 0\}$
- Reunalle ∂U pätee $\partial U = \{x \in \mathbb{R}^n;\ h(x) = 0\}$.
- Lisäksi pätee seuraava ehto: jos $h(x) = 0$, niin $\nabla h(x) \neq 0$.

Tehtäväsarja I

1. Jos h määrää C^k–joukon U, mikä on sen *yksikköulkonormaali*, eli reunan normaalivektori, jonka pituus on $= 1$, ja joka osoittaa *poispäin* joukosta U?

2. Anna esimerkki C^1–joukosta, ja sen yksikköulkonormaalista.

Tehtäväsarja II

3. Määrääkö funktio $h(x, y) = y^2 - x^4$ tason C^1–joukkoa? Havainnollista tätä piirtämällä kuva.

4. Määrääkö funktio $h(x, y) = xy - 1$ tason C^1–joukkoa? Onko tämä joukko rajoitettu tai yhtenäinen? Havainnollista tätäkin piirtämällä kuva.

Tehtäväsarja III

Tutustu DiBenedetton kirjan osioihin 1.2 ja 1.3.

5. Selitä, mikä ero on Laplace–operaattorin Dirichlet–ongelmalla, Neumann–ongelmalla ja Cauchy–ongelmalla.

6. Selitä, miksi kohdassa 1.3 esitelty Hadamardin esimerkki osoittaa, että Laplace–operaattorin Cauchy-ongelma on huonosti asetettu (eli ill–posed).

Tehtäväsarja IV

7. Kuinka DiBenedetton kirjan Lemman 1.1 päättelyä pitää muuttaa, että saadaan myös Neumann–ongelmaa koskeva väite todistettua.

8. Oletetaan, että *radiaalinen* funktio $f(x) = V(|x|)$ toteuttaa yhtälön $\Delta f = 0$ joukossa R^n. Osoita, että yhdenmuuttujan funktio $V(r)$ toteuttaa tällöin tavallisen differentiaaliyhtälön

$$V'' + \frac{n-1}{r} V' = 0. \tag{1}$$

9. Ratkaise ylläoleva yhtälö (1) tapauksissa $n = 2$ ja $n = 3$.