Osittaisdifferentiaaliyhtälöt
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2015
Harjoitus 13

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: ma 07.12.2015 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: ma 14.12.2015 klo 19.30

Tehtäväsarja I

Tällä kertaa vain yksi tehtäväsarja, ja viisi tehtävää. Kyseessä on siis harjoituskoe :)

1. Ratkaise alkuarvo–ongelma
$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = x^2, \quad x \in \mathbb{R},\, t > 0,$$
$$u(x,0) = x, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Etsi kaikki yhtälön
$$\frac{1}{h}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - i\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, 0 < x < \pi,\, t > 0,$$
muotoa $u(x,t) = X(x)T(t)$ olevat ratkaisut, joille
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t > 0.$$
Tässä h on positiivinen vakio.

3. Olkoon $\Omega = (0,l) \times \mathbb{R}_+$, $v \in C^2(\overline{\Omega})$ ja oletetaan että kaikilla $(x,t) \in \Omega$ pätee
$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = 0,$$
ja että alkuarvolle on voimassa
$$v(x,0) = 0, \quad 0 < x < l,$$
ja
$$v(0,t) = v(l,t) = 0, \quad t > 0.$$
Osoita, että $v = 0$.

4. Ratkaise reuna–alkuarvo–ongelma
$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < \pi,\, t > 0,$$
$$u(x,0) = \sin x + \sin^2 x, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \quad 0 < x < \pi.$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t > 0.$$

Seuraava tehtävä otetaan huomioon vain loppukoesuorituksessa

5. Konstruoi (Dirichlet) Greenin funktio Laplace–operaattorille Δ yksikköpallossa $B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^3;\ \|x\| < 1\}$.