Osittaisdifferentiaaliyhtälöt
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2015
Harjoitus 12

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: ma 30.11.2015 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: ma 07.12.2015 klo 19.30

Tehtäväsarja I

1. Ratkaise Cauchy–ongelma
$$(\partial_{tt} - c^2\Delta)u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3,\, t > 0,$$
$$u(x,0) = |x|^2, \quad u_t(x,0) = x_3.$$

2. Olkoon $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ Cauchy–ongelman
$$(\partial_{tt} - c^2\Delta)u = 0, \quad t > 0,$$
$$u|_{t=0} = f, \quad u_t|_{t=0} = g,$$
ratkaisu. Oletetaan, että f ja g ovat kompaktikantajaisia. Osoita, että on olemassa vakio C siten, että
$$|u(x,t)| \le C/t, \quad x \in \mathbb{R}^3,\, t > 0.$$

3. Tarkastellaan edellisen tehtävän ongelmaa, mutta nyt dimensiossa $2+1$, eli $x \in \mathbb{R}^2$ ja $t \ge 0$. Millaisen estimaatin saat todistettua $|u(x,t)|$:lle?

4. Tarkastellaan Cauchy–ongelmaa ns. *lennätinyhtälölle*:
$$u_{tt} - u_{xx} + \lambda^2 u = 0, \quad x \in \mathbb{R},\, t > 0,$$
$$u|_{t=0} = f, \quad u_t|_{t=0} = g,$$
missä $f \in C^3(\mathbb{R})$ ja $g \in C^2(\mathbb{R})$. Osoita, että
$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} J_0\left((\lambda\sqrt{t^2-(x-s)^2}\right) g(s)\,ds + \frac{\partial}{\partial t}\int_{x-t}^{x+t} J_0\left(\lambda\sqrt{t^2-(x-s)^2}\right) f(s)\,ds,$$
missä
$$J_0(s) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(s\sin(\theta))\,d\theta$$
on *nollannen kertaluvun Bessel–funktio*.

Tehtäväsarja II

Olkoon H normiavaruus. Lineaarikuvauksen $A : H \to H$ *normi* määritellään asettamalla
$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \|Ax\|/\|x\|.$$

Tämä on äärellinen jos ja vain jos A on jatkuva.

1. Olkoon H täydellinen normiavaruus, eli *Banach–avaruus*. Oletetaan, että jatkuvan lineaarikuvauksen K normille pätee $\|K\| < 1$. Osoita, että yhtälön

$$(\mathbf{I} + K)x = y, \quad y \in H,$$

yksikäsitteinen ratkaisu $x \in H$ saadaan normisuppenevana sarjana

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i K^i x.$$

Tämä sarja tunnetaan nimellä *Neumann–sarja* 1800–luvulla eläneen saksalaismatematiikon Carl Neumannin mukaan.

2. Oletetaan, että B_1 ja B_2 ovat Banach–avaruuksia, ja että jatkuvalla lineaarikuvauksella $A_0 : B_1 \to B_2$ on jatkuva käänteiskuvaus A_0^{-1}. Oletetaan, että $R : B_1 \to B_2$ on jatkuva lineaarikuvaus, ja että

$$\|R\| < \|A_0\|.$$

Osoita, että myös $A_0 + R$ on kääntyvä, ja määrää sen käänteiskuvaus.

Tehtäväsarja III

Seuraavia tehtäviä varten kertaa kompaktisuuden määritelmä ja perehdy DiBenedetton lukuihin 4.4–4.6

1. Miten määritellään melkein separoituva integraaliydin? Onko separoituvan integraaliytimen määräämä lineaarikuvaus $L^2 \to L^2$ aina kompakti?

2. Anna esimerkki kompaktista lineaarikuvauksesta, joka ei kuitenkaan ole äärellisulotteinen.