Osittaisdifferentiaaliyhtälöt
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2015
Harjoitus 11

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: ma 23.11.2015 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: ma 30.11.2015 klo 19.30

Tehtäväsarja I

Tarkastellaan aaltoyhtälön alukuarvo–onglmaa

$$u_{tt} - u_{xx} = 0,\ t > 0, \quad u|_{t=0} = f, \quad u_t|_{t=0} = g. \tag{1}$$

Lokaali–integroituva funktio u on ylläolevan ongelman *heikko ratkaisu*, mikäli kaikilla $\phi \in C_0^2(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+)$ pätee

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} u(\phi_{tt} - \phi_{xx})\,dxdt = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi_t(x,0) - g(x)\phi(x,0)\,dx.$$

1. Osoita, että jokainen (1):n C^2–ratkaisu on myös heikko ratkaisu.

2. Oletetaan, että f ja g ovat kompaktikantajaisia ja paloittain jatkuvia. Määritellään funktio u D'Alembertin kaavalla. Osoita, että u on lokaali–integroituva, ja että se on ongelman (1) heikko ratkaisu.

3. Olkoon $f = \chi_{[0,1]}$ ja $g = 0$. Määrää ongelman (1) heikko ratkaisu.

Tehtäväsarja II

1. Oletetaan, että $F \in C^1(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+)$. Osoita, että funktio

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-t+s}^{x+t+s} F(y,s)\,dyds$$

on ongelman

$$u_{tt} - u_{xx} = F,\ t > 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0,$$

kahdesti differentioituva ratkaisu.

2. Oletetaan, että $u \in C^2(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+)$ on ongelman (1) yksikäsitteinen ratkaisu, ja että f:llä ja g:llä on kompaktit kantajat. Määritellään u:n *kineettinen energia hetkellä* t kaavalla

$$k(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u_t^2(x,t)\,dx,$$

ja vastaavasti *potentiaalienergia hetkellä* t kaavalla

$$p(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u_x^2(x,t)\,dx.$$

Osoita, että

$$k(t) = p(t)$$

kun t on riittävän suuri.

Tehtäväsarja III

1. Oletetaan, että kahdesti differentioituvat $\mathbb{R}^3$:n vektorikentät E ja H toeteuttavat *Maxwellin yhtälöt tyhjiössä*:

$$E_t = \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla \times H, \quad H_t = -\frac{1}{\mu_0}\nabla \times E,$$
$$\nabla \cdot E = \nabla \cdot H = 0.$$

   Osoita, että kenttien E ja H koordinaattifunktiot E_i ja H_i toteuttavat skalaariaaltoyhtälön

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0,$$

   missä $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ on siis valonnopeus tyhjiössä.

Tehtäväsarja IV

Seuraavia tehtäviä varten kertaa kompaktisuuden määritelmä ja perehdy DiBenedetton lukuihin 4.1–4.3

1. Osoita, että ääretönulotteisessa Hilbert–avaruudessa rajoitetut ja suljetut joukot eivät välttämättä ole kompakteja.

2. Miten määritellään separoituva integraaliydin? Miten määritellään kompakti lineaarikuvaus? Onko separoituvan integraaliytimen määräämä lineaarikuvaus $L^2 \to L^2$ aina kompakti?