Osittaisdifferentiaaliyhtälöt
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2015
Harjoitus 10

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: ma 16.11.2015 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: ma 23.11.2015 klo 19.30

Tehtäväsarja I

Seuraavissa kahdessa tehtävässä todistetaan heikko maksimiperiaate lämpöyhtälölle

1. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ rajoitettu alue, ja $T > 0$. Merkitään

$$\Omega_T = \{(x,t);\, x \in \Omega,\, 0 < t < T\}.$$

ja

$$\partial'\Omega_T = \Omega \times \{t = 0\} \cup \partial\Omega \times [0,T].$$

Oletetaan, että $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$ toteuttaa Ω_T:ssä

$$u_t - \Delta u < 0.$$

Osoita, että

$$\max_{\overline{\Omega}_T} = \max_{\partial'\Omega_T} u.$$

2. (*Heikko maksimiperiaate lämpöyhtälölle*) Samoin oletuksin kuin edellisessä tehtävässä, paitsi että nyt Ω_T:ssä

$$u_t - \Delta u \leq 0.$$

Osoita, että edelleen

$$\max_{\overline{\Omega}_T} = \max_{\partial'\Omega_T} u.$$

Vihje: Sovella ensimmäistä tehtävää funktioon $v(x,t) = u(x,t) - kt$, missä k on positiivinen vakio.

Tehtäväsarja II

1. Ratkaise Cauchy–ongelma

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x,t) \quad \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0,$$

missä $f(x,t) = e^{x-t}$. **Vihje**: etsi ensin jokin funktio v siten että $v_{tt} - v_{xx} = e^{x-t}$.

2. Kuten edellinen tehtävä, mutta $f(x,t) = x^2$.

Tehtäväsarja III

Seuraavia tehtäviä varten perehdy DiBenedetton kirjan osioihin 5.5 - 5.7

1. Vertaa kaavoja (6.5) sivulla 194, ja (7.3) sivulla 197, ja selitä, mikä ero on aalto-yhtälön Cauchy–ongelman ratkaisuillla kahdessa ja kolmessa dimensiossa.

2. Mitä voit sanoa aalto-yhtälön ratkaisujen säännöllisyydestä dimensiossa kolme? Huomaatko eroa yksiulotteiseen tapaukseen?

3. Mitä voit sanoa aaltoyhtälön ratkaisun käytöksestä dimensiossa kolme, kun $t \to \infty$ jos alkudatalla on kompakti kantaja?

4. Mitä voit sanoa aaltoyhtälön ratkaisun käytöksestä dimensiossa kaksi, kun $t \to \infty$ jos alkudatalla on kompakti kantaja?