

## Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos

Syksy 2015

Harjoitus 1

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: ma 7.9.2015 klo 19.30

Korjausten viimeinen palautuspäivä: ma 14.9.2015 klo 19.30

Kaksi ensimmäistä tehtäväkokolemaa ovat kertaussuonteisia. Kaksi viimeistä tehtäväsarjaa pohjustavat toisen viikon luentoja

### Tehtäväsarja I

Voit käyttää seuraavissa tehtävissä tukena vektorianalyysin oppikirjaa.

1. Laske seuraavien funktioiden gradientit:

$$f(x, y) = e^{x^2+y^2} \sin(x - y), \quad g(x, y, z) = \frac{x^2 - y^2}{z^2 + e^{x+y}}.$$

2. Selitä, mitä tarkoittaa funktion  $f$  suunnattu derivaatta vektorin  $\alpha$ ,  $|\alpha| = 1$ , suuntaan. Mitä funktion gradientti kertoo sen kasvusta?

### Tehtäväsarja II

Näissä tehtävissä voit käyttää tukena differentiaaliyhtälöiden kurssin materiaalia

3. Olkoon  $y$  alkuarvo-ongelman

$$y' = \frac{y^3 - y}{1 + x^4 y^2}, \quad y(0) = 1/2,$$

ratkaisu. Osoita, että määrittelyjoukossaan  $0 < y(x) < 1$ .

4. Määrää alkuarvo-ongelman

$$y' = Ay, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ratkaisu, kun

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Tehtäväsarja III

Tutustu DiBenedetton kirjan luvun 2 johdantoon, tai vaihtoehtoisesti Evansin kirjan osioon 2.2.1 a).

5. Muotoile tarkasti väite, että *Laplace operaattori on translaatio-invariantti*, ja todista tämä.
6. Muotoile tarkasti väite, että *Laplace operaattori on rotaatio-invariantti*, ja todista tämä.

### Tehtäväsarja IV

7. Olkoon  $u \in C^2(E)$ , missä  $E \subset \mathbb{R}^n$  on avoin. Oletetaan, että  $\Delta u(x) > 0$  kaikilla  $x \in E$ . Voiko funktiolla  $u$  olla aitoa lokaalia maksimia joukossa  $E$ ? Entä aitoa minimiä?
8. Oletetaan että  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$  on lämpöyhtälön ratkaisu,

$$u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty).$$

Osoita, että kaikilla  $\lambda \in \mathbb{R}$  funktio  $u_\lambda(x, t) = u(\lambda x, \lambda^2 t)$  on myös lämpöyhtälön ratkaisu.