ODY 1, 1. viikko

Teemu Saksala

August 31, 2015

1 Käytännön asiat

- luennot (ti 12-14 C124 & to 12-14 C123)
- laskarit (palautus, tarkastus, uusinta, uusi tarkastus)
- koeviikko nro. 43, 19.-23.10. ei opetusta
- ohjausajat (ke 10-12 & pe 15-17 DK117)
- 2 välikoetta, ajankohta sovitaan ensi viikolla
- arviointi 48+6

2 Kurssin tavoitteet ja motivointi

Kurssi on johdatus osittaisdifferentiaaliyhtälöiden teoriaan. Pääpaino on kolmen klassisen yhtälön ratkaisujen tutkimisessa. Perehdymme Laplace-yhtälöön,

$$\Delta u := \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i x_i} u(x_1, \dots, x_n) = 0 \tag{2.1}$$

aaltoyhtälöön

$$(\partial_{tt} - \Delta)u := \partial_{tt} u(t, x_1, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i x_i} u(t, x_1, \dots, x_n) = 0 \tag{2.2}$$

sekä lämpöyhtälöön

$$(\partial_t - \Delta)u := \partial_t u(t, x_1, \ldots, x_n) - \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i x_i} u(t, x_1, \ldots, x_n) = 0. \tag{2.3}$$

Huom! osittaisderivaattaa k:n muuttujan suhteen merkitään $\frac{\partial}{\partial x_k} := \partial x_k$.

Kurssin aikana pyrimme löytämään vastauksen seuraaviin kysymyksiin.

Dirichlet reuna-arvo-ongelma:

Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko, jolla on C^1-sileä reuna ∂E. Olkoon $\varphi \in C(\partial E)$. Etsi $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \text{ joukossa } E \\ u = \varphi, \text{ joukossa } \partial E \end{cases} \tag{2.4}$$

Neumann reuna-arvo-ongelma:

Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko, jolla on C^1-sileä reuna ∂E. Olkoon $\psi \in C(\partial E)$. Etsi $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \text{ joukossa } E \\ \nabla u \cdot \nu = \psi, \text{ joukossa } \partial E \end{cases} \tag{2.5}$$

Yllä ν tarkoittaa reunan ∂E ulospäin osoittavaa yksikkönormaalia.

Lämpöyhtälön alkuarvo-ongelma:

Olkoon $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$. Etsi $u \in C^2((0, \infty) \times \mathbb{R}^n) \cap C([0, \infty), \times \mathbb{R}^n)$ s.e.

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)u = 0, & \text{joukossa } (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \\ u = \varphi, & \text{joukossa } \{0\} \times \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{2.6}$$

Aaltoyhtälön alkuarvo-ongelma:

Olkoot $\varphi, \psi \in C(\mathbb{R}^n)$. Etsi $u \in C^2((0, \infty) \times \mathbb{R}^n) \cap C([0, \infty), \times \mathbb{R}^n)$ s.e.

$$\begin{cases} (\partial_{tt} - \Delta)u = 0, & \text{joukossa } (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \\ u = \varphi,\ \partial_t u = \psi, & \text{joukossa } \{0\} \times \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{2.7}$$

DY vs ODY

Kursseilla DY 1 ja DY II todistettiin.

Theorem 2.1. *Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ väli. Olkoon funktio $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuva ja lisäksi kaikilla osaväleillä $[a, b] \subset I$ tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan y suhteen suorakaiteessa $[a, b] \times \mathbb{R}$. Olkoon $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$. Tällöin alkuarvotehtävällä*

$$y'(x) = f(x, y(x)),\ y(x_0) = y_0; \tag{2.8}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu $y : I \to \mathbb{R}$.

Vastaava tulos pätee myös korkeamman kertaluvun yhtälöille, sillä ne voidaan aina palauttaa ensimmäisen kertaluvun systeemeiksi.

Osittaisdifferentiaaliyhtälöillä vastaavaa yleistä tulosta ei ole olemassa. Ratkaisujen olemassaolo liittyy suoraan kyseiseen yhtälötyyppiin ja määrittelyjoukon E geometriaan.

Laplace yhtälön fysikaalinen tulkinta

Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Olkoon $u \in C^2(U)$ funktio joka, kertoo jonkin fysikaalisen ominaisuuden suuruudesta pisteessä $x \in U$. Esim:

- liuoksen konsentraatio
- kaasun tiheys
- lämpötila
- elektrostaattinen potentiaali

Oletamme systeemin olevan tasapainotilassa. Tämä tarkoittaa, että kaikilla sileillä alueilla $V \subset U$ pätee

$$\int_{\partial V} F \cdot \nu \, d\sigma = 0, \tag{2.9}$$

jossa vektorikenttä $F = -a\nabla u$, $a > 0$ on suureen u vuo (flux). Negatiivinen suunta, johtuu siitä, että aine virtaa aina kohti pienempää tiheyttä. Yhtälö

(2.9) seuraa siitä, että tasapainon takia pinnan ∂V läpi täytyy virrata aina yhtä paljon ainetta sisään kuin ulos.

Divergenssilauseen nojalla pätee

$$\int_V \mathrm{div} F \, dx = \int_{\partial V} -a\nabla u \cdot \nu \, d\sigma = 0.$$

Koska joukko $V \subset U$ oli mielivaltainen, niin

$$\mathrm{div} F = 0, \text{ joukossa } U.$$

Oletetaan, että $a = 1$. Silloin saamme

$$\Delta u = \nabla \cdot \nabla u = \mathrm{div} F = 0.$$

3 Vektorianalyysin kertaus

Olkoot $U \subset \mathbb{R}^n$ ja $V \subset \mathbb{R}^m$ avoimia osajoukkoja.

<u>Funktioavaruudet</u>:

Merkitään

$$C(U, V) := \{f : U \to V | f \text{ on jva}\}$$

erikoistapaus

$$C(U, \mathbb{R}) =: C(U).$$

Kuvauksen $f : U \to \mathbb{R}^m$ komponenttikuvauksia merkitään

$$f = (f_1, \dots, f_m),$$

$f_i : U \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$. Kerran jatkuvasti derivoituvien funktioden joukkoa merkitään.

$$C^1(U, \mathbb{R}^m) := \{f : U \to \mathbb{R}^m | \partial_{x_k} f_j \in C(U, \mathbb{R}^n)\}$$

Erikoistapaus

$$C^1(U, \mathbb{R}) = C^1(U).$$

Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ *kantaja* on joukko

$$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in U : f(x) \neq 0\}}$$

Merkintä
$$C_0^1(U) := \{f \in C^1(U) : \mathrm{supp}(f) \subset U\}.$$

Ketjusääntö:

Jos $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$, niin sen *Jakobiaani* pisteessä $p \in U$ määritellään kaavalla

$$Df(p) := \begin{pmatrix} \partial x_1 f_1(p) & \dots & \partial x_n f_1(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial x_1 f_m(p) & \dots & \partial x_n f_m(p) \end{pmatrix} \in M(n \times m, \mathbb{R}).$$

Jos $W \subset \mathbb{R}^k$ on avoin, $f \in C^1(U, W)$ sek $g \in C^1(W, V)$, niin $g \circ f \in C^1(U, V)$ ja kuvauksen $g \circ f$ jakobiaanille pätee

$$D(g \circ f)(p) = Dg(f(p))Df(p)$$

C^1-kuvauksen gradientti:

Jos $f \in C^1(U)$, niin kuvausta $\nabla f : U \to \mathbb{R}^n$,

$$\nabla f(p) = (\partial x_1 f(p), \dots, \partial x_n f(p)),$$

$p \in U$ kutsutaan funktion f *gradientiksi*. Tällöin $\nabla f \in C(U, \mathbb{R}^n)$. Huom! $\nabla f = Df$, kun $f \in C^1(U)$.

Olkoon $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, ja $g \in C^1(\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n)$, silloin

$$\nabla(f \circ g) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m.$$

Olkoon nyt $(x_i)i = 1^m$ koordinaatit $\mathbb{R}^n$ ja $(y_j)_{j=1}^n$ koordinaatit $\mathbb{R}^n$. Olkoon $p \in \mathbb{R}^m$. Tällöin pätee

$$\nabla(f \circ g)\Big|_p = (\partial x_1(f \circ g), \dots, \partial x_m(f \circ g))\Big|_p$$

ja

$$\partial x_i(f \circ g)\Big|_p = \nabla_y f\Big|_{g(p)} \cdot (\partial x_i g_1, \dots, \partial x_i g_n)\Big|_p = \sum_{j=1}^m \partial y_j f\Big|_{g(p)} \partial x_i g_j\Big|_p$$

Parametrisoidut polut ja pinnat $\mathbb{R}^n$:ssä.

Jatkuvaa kuvausta $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^m$ kutsutaan *poluksi*. Mikäli $\gamma \in C^1((a,b),\mathbb{R}^m)$ merkitään kokonaisderivaattaa

$$\frac{d}{dt}(\gamma_1(t),\dots,\gamma_m(t)) =: \dot{\gamma}(t).$$

Esim: Olkoot $g(x,y) = 2x+3y$ ja $f(x) = (x^2, \sin(x))$. Määritä ketjusäännällä $\frac{d}{dt}(g \circ f)(t)|_{t=0}$! Koska

$$\nabla g(x,y) = (2,3) \text{ ja } \dot{f}(t) = (2t, \cos(t)),$$

niin

$$\frac{d}{dt}(g \circ f)(t)|_{t=0} = \nabla g|_{f(0)} \dot{f}(0) = (2,3) \cdot (0,1) = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3.$$

Jatkuvaa kuvausta $r : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ kutsutaan *parametrisoiduksi pinnaksi.* Esim: Pallon kuori

$$(\theta, \varphi) \mapsto (\sin(\theta)\cos(\varphi), \sin(\theta)\sin(\varphi), \cos(\theta)).$$

Tyypillinen esimerkki parametrisoidusta pinnasta on jatkuvan kuvauksen $f : U \to \mathbb{R}$ graafi eli kuvaus

$$(x_1,\dots,x_n) \mapsto (x_1,\dots,x_n, f(x_1,\dots,x_n)) =: r(x_1,\dots,x_n).$$

Huomaa, että tässä tapauksessa pinta ei voi leikata itseään!

Esim: xy-taso $\mathbb{R}^3$:ssa

$$(x,y) \mapsto (x,y,0).$$

Esim. Pallokuoren pohjoiskalotti $\mathbb{R}^3$:ssa.

$$(x,y) \mapsto (x,y,\sqrt{1-(x^2+y^2)}),\ x^2+y^2 < 1$$

Olkoon $r \in C^1(U, \mathbb{R}^{n+1})$ eli niin sanottu C^1-sileä parametrisoitu pinta. Olkoon $p \in U$ ja oletetaan, että vektorit

$$v_i(p) := (\partial_{x_i} r_1(p), \dots, \partial_{x_i} r_{n+1}(p)),\ i = 1,\dots n$$

ovat lineaarisesti riippumattomia. Tällöin joukko

$$T_p r := \operatorname{span}(v_1, \dots, v_n)$$

on lineaarivaruuden $\mathbb{R}^{n+1}$ n-ulotteinen aliavaruus. Tätä avaruutta kutsutaan tason r tangenttitasoksi pisteessä p. Mikäli $\dim \operatorname{span}(v_1(p), \dots, v_n(p)) = n$ kaikilla $p \in U$, niin on olemassa täsmälleen kaksi C^1-yksikkövektorikenttää $\nu_\pm : U \to \mathbb{R}^{n+1}$, jotka ovat kohtisuorassa pintaa r vastaan jokaisessa pisteessä $p \in U$. Nämä voidaan löytää ratkaisemalla yhtälöryhmä

$$\begin{cases} \nu \cdot v_1(p) = 0 \\ \qquad \vdots \\ \nu \cdot v_n(p) = 0 \end{cases}, \; x \in \mathbb{R}^{n+1}, \; \|\nu\| = 1. \tag{3.1}$$

Mikäli $U \subset \mathbb{R}^2$, niin tämän yhtälöryhmän ratkaisu on

$$\nu_\pm = \frac{v_1 \times v_2}{\|v_1 \times v_2\|}, \; v_1 \times v_2 = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1^1 & v_1^2 & v_1^3 \\ v_2^1 & v_2^2 & v_2^3 \end{pmatrix}.$$

Jos parametrisoitupinta on annettu funktion $(x_1, \dots, x_n) \mapsto f((x_1, \dots, x_n))$ graafina, niin tällöin

$$v_i(p) = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \dots 0, \partial_{x_i} f(p)).$$

Tässä tapauksessa $\operatorname{span}(v_1, \dots, v_n)$ on aina avaruuden $\mathbb{R}^{n+1}$ n-ulotteinen aliavaruus ja yhtälöryhmä (3.1) on muotoa

$$\begin{cases} \nu_1 + \nu_{n+1} \partial_{x_i} f(p)) = 0 \\ \qquad \vdots \\ \nu_n + \nu_{n+1} \partial x_n f(p)) = 0 \end{cases}, \; \|x\| = 1$$

Ratkaisu on siis muotoa

$$\nu_i = -\nu_{n+1} \partial_{x_i} f(p)), \text{ ja } \nu_{n+1} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla f(p)\|^2}}$$

Harj! Laske $\mathbb{R}^3$:n pallokuoren pohjoiskalotin yksikkönormaali.

Yhtälöryhmän (3.1) ratkaisussa saatua joukossa U määriteltyä jatkuvaa kuvausta

$$p \mapsto A(p) = \sqrt{1 + \|\nabla f(p)\|^2} \tag{3.2}$$

kutsutaan pintaan r liittyväksi *pinta-alaelementiksi.*

Esim. pinnan $(x, y) \mapsto (x, y, 3)$ normaalivektori pisteessä (x, y) on $(0, 0, \pm 1)$.

Olkoon $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ avoin ja sellainen että $r(U) \subset V$. Olkoon $g \in C(V)$. Kaavan (3.2) avulla määrittelemme funktion g *pinta-integraalin* pinnalla r seuraavasti

$$\int_{r(U)} g \, d\sigma := \int_U g(r(x))A(x) \, dx. \tag{3.3}$$

Yllä dx viittaa n-ulotteiseen Lebesquen mittaan. Kuvausta $A(x)$ voi ajatella tietona siitä, kuinka paljon n-neliön pinta-ala muuttuu, kun sen venyttää pinnalle $r(U)$.

<u>Sileä pinta tasa-arvokäyränä</u>

Olkoon $f \in C^1(U)$, $p \in U$ ja $c := f(p) \in \mathbb{R}$. Oletetaan että, jokaisella $q \in U$ pätee $\nabla f(q) \neq 0$. Joukkoa

$$L_c(f) = \{q \in U : f(q) = c\}$$

kutsutaan tasa-arvopinnaksi "Level set". Tälle pinnalle on voimassa implisiittinen esitys

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c.$$

Esim: Olkoon $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ määritelty kaavalla

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Tällöin yksikkö kuulan kuori on

$$S^2 = L_1(f).$$

Sillä

$$\nabla f(x, y, z) = 2(x, y, z) \neq 0.$$

Theorem 3.1. *Olkoon $p \in L_c(f), a > 0$ ja $\gamma : (-a, a) \to L_c(f)$ C^1-sileä polku, jolle pätee $\gamma(0) = p$. Tällöin*

$$\nabla f(p) \cdot \dot{\gamma}(0) = 0.$$

Eli kuvauksen f gradientti on kohtisuorassa tasa-arvojoukkoa $L_c(f)$ vastaan.

Proof. Koska $f \circ \gamma \equiv c$, niin

$$0 = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)|_{t=0} = \nabla f(p) \cdot \dot{\gamma}(0).$$

■

Edellisen lauseen avulla voimme päätellä, että tangenttitaso

$$T_p L_c(f) = \{v \in \mathbb{R}^n : v \cdot \nabla f(p) = 0\}.$$

4 Divergenssilause sovelluksineen

Tällä kurssilla tutkimme pääosin sellaisia ODY:tä jotka on määritelty avaruuden $\mathbb{R}^n$ rajoitetussa ja avoimessa joukossa. Kuten jo aikaisemmin mainittiin, joudumme asettamaan avoimen ja rajoitetun joukon E reunalla ∂E tiettyjä sileysvaatimuksia, jotta saamme toimivan teorian. Haluamme sulkea pois joukot joiden reunat ovat liian villejä. Esimerkiksi haluamme päästä eroon joukoista, joiden

- reunassa on piikkejä
- reuna leikkaa itsensä
- reuna on litistynyt kasaan
- on Cantorin joukko tms.

Tämän takia joudumme ottamaan käyttöön seuraavan vaikeahkon määritelmän.

Definition 4.1. *Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja rajoitettu. Sanomme että joukolla E on C^1-sileä reuna ∂E, mikäli kappale E voidaan siirtää sellaiseen asentoon, että jokaiselle $p \in \partial E$ on olemassa sellaiset $r > 0$ ja $\gamma \in C^1(\mathbb{R}^{n-1})$, että*

$$E \cap B(p, r) = \{x \in B(p, r) : x_n > \gamma(x_1, \ldots, x_{n-1})\}.$$

Huom! tämä takaa, että reuna ∂E voidaan lokaalisti parametrisoidan jonkin kuvauksen γ graaffina.

Definition 4.2. *Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja vektorikenttä $F \in C^1(E, \mathbb{R}^n)$. Kuvaus $divF : U \to \mathbb{R}$ määritellään kaavalla*

$$divF(p) := (\nabla \cdot F)(p) := \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} F_i(p).$$

Theorem 4.3 (Divergenssilause)**.** *Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko, jolla on C^1-sileä reuna. Olkoon $F \in C^1(\overline{E}, \mathbb{R}^n)$. Tällöin pätee*

$$\int_E divF \, dx = \int_{\partial E} F \cdot \nu \, d\sigma. \tag{4.1}$$

Proof. Katso: Lee J., Introduction to smooth manifolds, Springer. ■

Lauseen todistus on käsitelty suhteellisen tarkasti Vektorianalyysin kurssilla, kun dimensio $n = 3$. Useampi ulotteinen tarkastelu vaatisi laajemman koneiston kehittämistä, joka ei kuulu tämän kurssin ydinasioihin.

Käytämme kaavaa (4.1) todistaaksemme n.s. Greenin identiteetit. Aloitamme seuraavalla Gauss-Greenin lauseella.

Theorem 4.4 (Gauss-Green)**.** *Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko, jolla on C^1-sileä reuna. Olkoon $f \in C^1(\overline{E})$. Tällöin jokaiselle $i \in \{1, \ldots, n\}$ pätee*

$$\int_E \partial x_i f \, dx = \int_{\partial E} f \nu_i \, d\sigma. \tag{4.2}$$

Proof. Olkoon $i \in \{1, \ldots, n\}$. Määritellään vektorikenttä $F \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ kaavalla

$$F(x) = (0, \ldots, 0, \underbrace{f(x)}_{i}, 0, \ldots, 0).$$

Kaavan (4.1) nojalla pätee

$$\int_E \partial_{x_i} f \, dx = \int_E \mathrm{div} F \, dx = \int_{\partial E} F \cdot \nu \, d\sigma = \int_{\partial E} f \nu_i \, d\sigma.$$

■

Käytämme Gauss-Greenin kaavaa (4.2) todistamaan osittaisintegrointikaavan.

Theorem 4.5 (Osittaisintegrointikaava)**.** *Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko, jolla on C^1-sileä reuna. Olkoon $u, v \in C^1(\overline{E})$. Tällöin jokaiselle $i \in \{1, \ldots, n\}$ pätee*

$$\int_E (\partial_{x_i} u) v \, dx = -\int_E u(\partial_{x_i} v) \, dx + \int_{\partial E} uv\nu_i \, d\sigma. \tag{4.3}$$

Proof. Muista, että osittaisderivaattaoperaattori toteuttaa Leibnitzin säännön:

$$\partial_{x_i}(fg) = g\partial_{x_i} f + f\partial_{x_i} g.$$

Koska $uv \in C^1(\overline{E})$, niin kaava seuraa Leibnitzin säännöstä ja Gauss-Greenin kaavasta (4.2). ■

Theorem 4.6 (Greenin kaavat)**.** *Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko, jolla on C^1-sileä reuna. Olkoon $u, v \in C^2(\overline{E})$. Tällöin seuraavat identiteetit ovat voimassa:*

$$\int_E v\Delta u + \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\partial E} v(\nabla u \cdot \nu) \, d\sigma, \tag{4.4}$$

$$\int_E v\Delta u - u\Delta v \, dx = \int_{\partial E} v(\nabla u \cdot \nu) - u(\nabla v \cdot \nu) \, d\sigma. \tag{4.5}$$

$$\int_E \Delta u \, dx = \int_{\partial E} (\nabla u \cdot \nu) \, d\sigma. \tag{4.6}$$

Proof. Koska $u \in C^2(\overline{E})$, niin jokaisella $i \in \{1, \ldots, n\}$ funktio $\partial_{x_i} u \in C^1(\overline{E})$. Määritellään vektorikenttä $F \in C^1(\overline{E}, \mathbb{R}^n)$ kaavalla $F = v\nabla u$. Divergenssilauseen (4.1) nojalla nyt pätee

$$\int_E v\Delta u + \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_E \mathrm{div} F \, dx = \int_{\partial E} F \cdot \nu = \int_{\partial E} v(\nabla u \cdot \nu) \, d\sigma.$$

Tämä todistaa kaavan (4.4).

Kaava (4.5) seuraa, kun kaavassa (4.4) funktioiden u ja v paikat vaihdetaan ja näin saadut kaavat vähennetään toisistaan.

Kaava (4.6) Seuraa kaavasta (4.4), kun funktion v paikalle sijoitetaan vakiofunktio $v \equiv 1$. ■