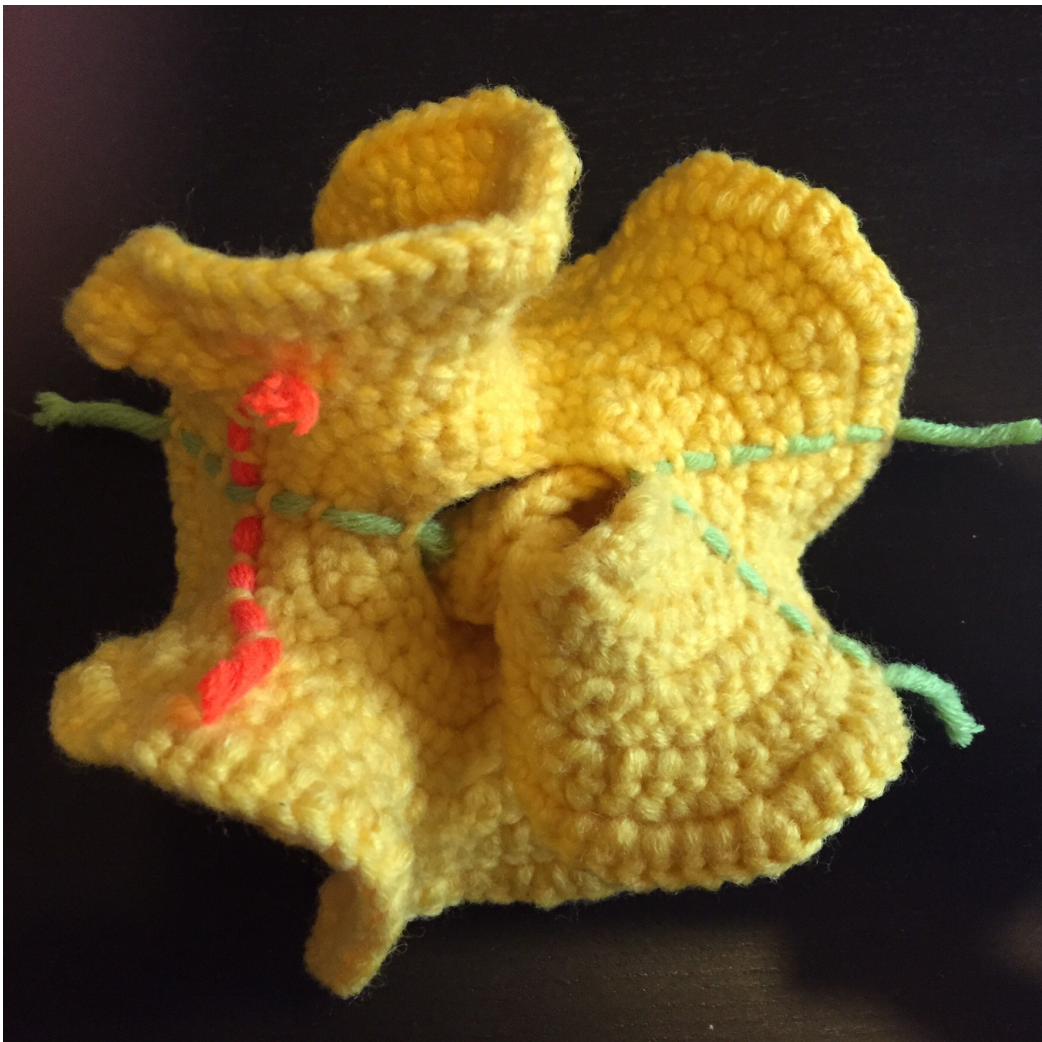


HYPERBOLISESTA GEOMETRIASTA

RIIKKA SCHRODERUS

7. maaliskuuta 2015



SISÄLTÖ

1. Historia	2
2. Hyperbolinen vs. Euklidinen geometria	4
3. Hyperbolisen geometrian malleja	6
3.1. Konforminen malli	6
3.2. Projektiivinen malli	10
3.3. Puolipallomalli	12
3.4. Yhteys suhteellisuusteoriaan	13
4. Hyperbolinen pinta	14
4.1. Kaarevuus	14
4.2. Esimerkkejä	15
5. Lopuksi	17
Viitteet	18

1. HISTORIA

Hyperboliseen geometriaan, jonka löytämisen historia on värikäs ja monivivahteinen, johti ensimmäisen, Eukleideen mukaan nimetyn, geometrisen järjestelmän kyseenalaistaminen. Geometrian syntyminen esteettisistä ja käytännön tarpeista noin pari-kolme tuhatta vuotta ennen ajanlaskun alkua mm. Egyptissä, Niilin jokilaaksossa oli alku koko matematiikalle. Se, ja samalla koko matematiikka, kehittyi itsenäiseksi tieteenalakseen vasta Antiikin Kreikassa n. 500 e.a.a. Tällöin konkreettiset *toimintaohjeet* yksittäisiin maanmittaukseen tai verotukseen liittyviin ongelmiin muuttuivat yleisemmin päteviksi kaavoiksi ja alettiin esittää myös puhtaasti matemaattisia ongelmia ilman yhteyttä arkielämään. Eukleideen kuuluisa *Elementa* oli valmistuessaan (noin 300 e.a.a.) ensimmäinen kirjallinen teos, joka kattoi koko Antiikin Kreikan siihenastisen matematiikan; geometrian lisäksi myös paljon lukuteoriaa. Eukleideen aikaan ympäröivän maailman tarkastelu keskittyi kirjaimellisesti ruohonjuuritasolle sekä 3-ulotteiseen lähiympäristöön. Täytyy tosin muistaa, että tässä vaiheessa hyväksyttiin (ainakin tiedemiesten keskuudessa) jo Maan pallonmuoto ja koska navigointikin jo osattiin, niin myös *pallogeometria* oli saanut alkunsa. Elementassa Eukleides esitti viisi *aksioomaa*, jotka määrittelivät meille jo ala-luokilta tutun, nykyisin Euklidiseksi tasogeometriaksi kutsutun järjestelmän lait.

Eukleidesta kritisoitiin tämän aksiomaattisen järjestelmän epätäydellisyydestä ja aksiomiin perustumattomien oletuksien tekemisestä jo hänen aikanaan, mutta meni pari tuhatta vuotta ennen kuin Euklidisen geometrian aksiomat lopulta korjattiin ja täydennettiin mm. D. Hilbertin (1862–1943) toimesta nykyiseen muotoonsa. Kannattaa huomioida, että tuhat vuotta tästä ajanjaksosta eli n. 400–1400 oli myös matematiikan kannalta *pimeää aikaa*, jolloin ei edistystä juurikaan tapahtunut. Matemaatikoita, joista useimmat siihen aikaan olivat myös fyysikoita ja astronomeja, kuitenkin askarrutti kysymys, kuvaako Euklidinen (3-ulotteinen) geometria todella parhaiten maailmaamme.

Erityisesti tasogeometrian aksiomista viides, niin kutsuttu *paralleeliaksiooma* oli herättänyt närkästystä jo Eukleideen ajoista aina 1800-luvulle asti matemaatikkojen parissa, jotka kilvan yrittivät todistaa paralleeliaksioomaa teoreemaksi eli välttämättömäksi seuraukseksi muista aksiomista. Epäonnistuneet yritykset toivat kuitenkin mukanaan paitisi yhtäpitäviä muotoiluja paralleeliaksioomalle, myös koko joukon absurdeilta vaikuttavia seurauksia sille, että paralleeliaksiooma ei pitäisi. Ensimmäisenä hyperbolisen geometrian ”löytäjänä” pidetään italialaista G. G. Saccheria (1667–1733), vaikkakaan hän ei sitä itse koskaan ymmärtänyt. Hän epäonnistui yrittäessään osoittaa, että nelikulmioiden, joissa on kaksi suoraa kulmaa ja kaksi terävää kulmaa, olemassaolo johtaa ristiriitaan muiden aksiomien kanssa. Nämä nelikulmiot tunnetaan *Saccherin nelikulmioina*. Sveitsiläinen J. H. Lambert (1728–1777) jatkoi tästä ja tutki puolestaan nelikulmioita, jossa on kolme suoraa kulmaa ja yksi terävä kulma. *Lambertin nelikulmioiden* olemassaolosta hän päätyi seuraukseen, että tällöin minkä tahansa kolmion pinta-ala on radiaaneissa $\pi -$ (kolmion kulmien summa). Hän myös päätteli aivan oikein, että geometria, jossa paralleeliaksiooma ei päde, vastaa geometriaa pallopinnalla, jonka säde on imaginaarinen! Myös aikansa arvostetuin matemaatikko, saksalainen C. F. Gauss (1777–1855) tutki miltei

koko elämänsä ajan paralleeliaksiomatonta geometriaa, mutta ei mainettaan varjelevana perfektionistina julkaissut mielestään epätäydellisiä tuloksiaan. Lopulta Gaussin hyvän ystävän, Wolfgang Bolyain, poika János (1802–1860) ja samoihin aikoihin venäläinen matemaatikko N. Lobachevsky (1792–1856) julkaisivat toisistaan tietämättä tuloksensa *tyhjästä tulleesta maailmasta*, hyperbolisesta geometriasta. Satoja matemaatikkotyövuosia ilmassa roikkunut totuus, että on olemassa täydellisiä geometrisia järjestelmiä, joissa paralleeliaksioma ei päde, oli vihdoinkin saavutettu. Tosin vasta Gaussin kuoleman jälkeen matemaatikot hyväksyivät paralleeliaksiomattoman geometrisen järjestelmän ja mm. E. Beltrami, H. Poincaré, F. Klein ja B. Riemann tarkensivat ja kehittivät tätä eteenpäin. Vuonna 1868 Beltrami vihdoinkin todisti, että paralleeliaksioma ei ole seuraus muista aksioomista.

Historian vaiheista kiinnostunut lukija löytää lisätietoa mm. seuraavista, tämänkin osuuden lähteinä olleista, teoksista: Matematiikan historiasta yleisesti saa hyvän kokonaiskuvan M. Lehtisen *Matematiikan historia* -luentomuistiinpanoista [4] ja geometriasta niin matematiikan, kuin historiankin kannalta kirjoittaa M. J. Greenberg kirjassaan *Euclidean and Non-Euclidean Geometries* [3]. Lennokkaan ja hauskan matkan geometrian kehitysvaiheisiin taas tarjoaa L. Mlodinow pokkarissaan *Euclid's window* [7].

KUVA 1. Esimerkki hyperbolisesta pinnasta



2. HYPERBOLINEN VS. EUKLIDINEN GEOMETRIA

Aloitetaan tutustuminen hyperboliseen geometriaan vertaamalla sitä tuttuun Euklidiseen geometriaan. Molemmat yleistyvät helposti useampaan ulottuvuuteen, mutta tarkastellaan tässä yksinkertaistuksen vuoksi vain 2-ulotteista tasogeometriaa. Puhumme siis pisteistä ja suorista tasossa. Sekä Euklidisesta, että epä-Euklidisista geometrioista kiinnostuneelle voi suositella jo aiemmin mainittua, paljon myös tehtäviä sisältävää Greenbergin kirjaa [3], tai vielä yleistajuisempaa, ei niin paljon tehtäviin keskittynyttä kerrontaa kai-paavalle J. Grayn *Ideas of Space* -kirjaa [2].

Aksiomaattinen järjestelmä matematiikassa tarkoittaa sitä, että asetetaan (mahdollisimman pieni) joukko aksiomia eli *yleisesti hyväksytyjä totuuksia*, ja näistä aksiomista loogisen päättelyn avulla johdetaan erilaisia tuloksia. Aksiomien täytyy olla toisistaan *riippumattomia*, jolloin mitään niistä ei voida johtaa muista aksiomista, ja aksiomista johdettujen tulosten täytyy olla *ristiriidattomia* keskenään. Euklidinen geometria on esimerkki tällaisesta järjestelmästä. Kannattaa huomata, että aksiomaattinen geometria on abstrakti järjestelmä, joka ei tarvitse yhteyttä fyysikaaliseen maailmaan taikka visualisointia, vaan kaikki todistukset palautuvat aksiomiin, niistä jo johdettuihin tuloksiin ja loogiseen päättelyyn. Kuvat ja geometrian olioiden nimeäminen fyysikaalisesta maailmasta tutuiksi *pisteiksi, suoriksi ja tasoiksi* ovat vain apukeino havainnollistaa tilannetta, ja toisaalta, koska pisteet ja suorat tasossa toteuttavat tasogeometrian aksiomat, niin geometrian tulokset pätevät niille. Aksiomaattinen geometria ei myöskään itsessään vaadi todistuksiin koordinaatistoa ja algebrallisia keinoja, vaikka nämä toki voidaan yhdistää *analyttiseksi geometriaksi*. Euklidisen tasogeometrian aksiomat nykymuodossaan ja paljon esimerkkejä sekä tehtäviä aksiomaattisesta todistamisesta lukija löytää esimerkiksi Lehtisen luentomuistiinpanoista *Geometrian perusteet* (2013) [5]. Aksiomaattisen järjestelmän perusidea taas on selitetty yleistajuisesti R. Courantin ja H. Robbinsin kirjassa [1, Luku IV].

Eukleideen Elementassa esittämät tasogeometrian aksiomat sanoivat:

- E1. *Mistä tahansa pisteestä voidaan piirtää suora mihin tahansa pisteeseen.* (Tämän on ymmärretty sisältävän implisiittisesti myös tällaisen suoran yksikäsitteisyys.)
- E2. *Jana voidaan jatkaa suoraksi.*
- E3. *Voidaan piirtää ympyrä, jonka keskipiste on mikä hyvänsä ja säde mikä hyvänsä.*
- E4. *Kaikki suorat kulmat ovat keskenään samat.*
- E5.** *Oletetaan, että suora leikkaa kahta muuta suoraa siten, että samalle puolelle sitä syntyy kaksi sisäpuolista leikkauskulmaa, jotka ovat yhteensä vähemmän kuin kaksi suoraa kulmaa. Tällöin suorat, jos niitä rajatta jatketaan, kohtaavat toisensa sillä puolen kolmatta suoraa, missä ovat kaksi mainittua kulmaa, jotka ovat yhteensä vähemmän kuin kaksi suoraa kulmaa. (Paralleeliaksioma)*

Paralleeliaksioma esitetään usein myös muodossa

- E'5.** *Jokaisen suoralle kuulumattoman pisteen kautta kulkee enintään yksi suora, joka on yhdensuuntainen ensimmäisen suoran kanssa.*

Ehkä tutuin esimerkki geometriasta, jossa paralleeliaksioma ei päde, on pallogeometria esimerkiksi maapallon pinnalla. Tällöin ”suoria” ovat kaikki ne ympyrät, joiden keskipiste on pallon keskipiste (esimerkiksi kaikki pituuspiirit). On helppo nähdä, että yllä olevista aksioomista toteutuvat E1-E4. Kun muistetaan, että suorat ovat yhdensuuntaiset, mikäli ne ovat sama suora tai niillä ei ole yhtään yhteistä pistettä, niin huomataan että paralleeliaksioma ei päde, sillä kaikki pallogeometrian suorat leikkaavat jopa kahdessa pisteessä. Hyperbolinen geometria, jota pidetään monessa mielessä pallogeometrian vastakohtana, saadaan Euklidisestä geometriasta korvaamalla paralleeliaksioma negaatiollaan, eli

H5. *Jokaisen suoralle kuulumattoman pisteen kautta kulkee vähintään kaksi suoraa, jotka ovat yhdensuuntaisia ensimmäisen suoran kanssa.*

Monet tasogeometriasta tutut ilmiöt ovat itse asiassa yhtäpitäviä paralleeliaksioman kanssa, kuten esimerkiksi

- kolmion kulmien summa on π radiaania ($= 180^\circ$),
- on olemassa suorakulmioita (= nelikulmio, jossa neljä suoraa kulmaa),
- on olemassa *yhdenmuotoisia* kolmioita, jotka eivät ole *yhteneviä* (eli samankokoisia).

Hyperbolisessa geometriassa siis mikään yllä luetelluista ei toteudu. Esimerkiksi kaikki yhdenmuotoiset kolmiot ovat välttämättä myös yhteneviä ja nelikulmioiden kulmien summa on alle 2π ($= 360^\circ$). Kolmion kulmien summa hyperbolisessa geometriassa saadaan hyvin elegantilla kaavalla

$$(\text{kolmion kulmien summa}) = \pi - (\text{kolmion ala}).$$

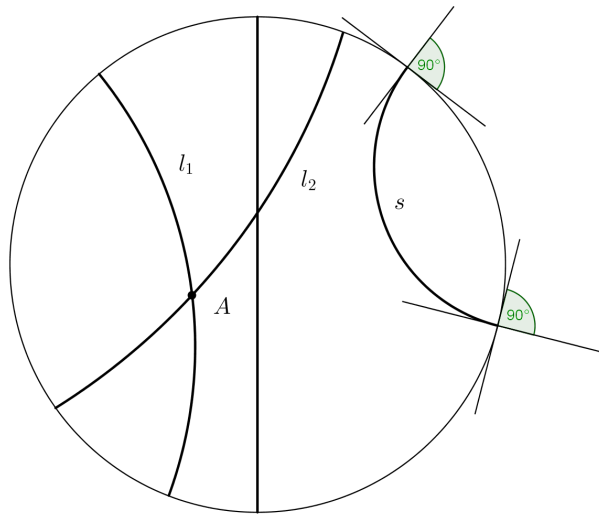
Seuraavassa luvussa tarkastellaan hyperbolisia malleja eli erilaisia visualisointeja, jotka auttavat hahmottamaan paremmin hyperbolista geometriaa. On hyvä pitää mielessä, että riippumatta geometriasta suora eli *geodeesi* on aina sellainen, että lyhin reitti kahden pisteen välillä kulkee geodeesia pitkin. Geodeesien ”muoto” riippuu paitsi geometriasta myös valitusta *metriikasta* eli etäisyyden käsitteestä, kuten pian nähdään. Euklidisellä etäisyydellä tarkoitetaan jatkossa tuttua Pythagoraan lauseella saatavaa etäisyyttä, jossa kahden (tason) pisteen (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) välinen etäisyys on määritelty kaavalla $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

3. HYPERBOLISEN GEOMETRIAN MALLEJA

Hyperbolista geometriaa voi kahdessa ulottuvuudessa visualisoida ja mallintaa useilla eri tavoilla. Ehkä tunnetuimmat ja käytetyimmät näistä ovat *konforminen* ja *projektiivinen malli*, jotka tarkastelevat hyperbolista geometriaa rajoitetussa, Euklidisessa kiekossa. (Huom: Myös Euklidista geometriaa voidaan tarkastella tutun, rajoittamattoman tason sijaan rajoitetussa avoimessa kiekossa, jossa suorina ovat tietyt puoliellipsit ja kiekon halkaisijat, ks. esimerkiksi [6].) Molemmat näistä ovat Beltramin (1835–1900) alunperin esittämiä, mutta usein niitä kutsutaan ne uudelleen löytäneiden ja paremmin tunnetuksi tehneiden matemaatikoiden mukaan; konformista mallia kutsutaan Poincarén (1854–1912) ja projektiivista (Beltrami-)Kleinin (1849–1925) kiekkomalliksi. Beltrami sai sentään pitää kokonaan omissa nimissään *puolipallomallin*, joka yhdistää edelliset. Tarkastellaan seuraavaksi näitä malleja paitsi ominaisuuksiensa, myös M. C. Escherin taiteen kautta. Lisätietoja näiden mallien matematiikasta lukija löytää esimerkiksi Greenbergin [3, Luku 7] tai R. Penrosen [8, Luku 2] kirjoista.

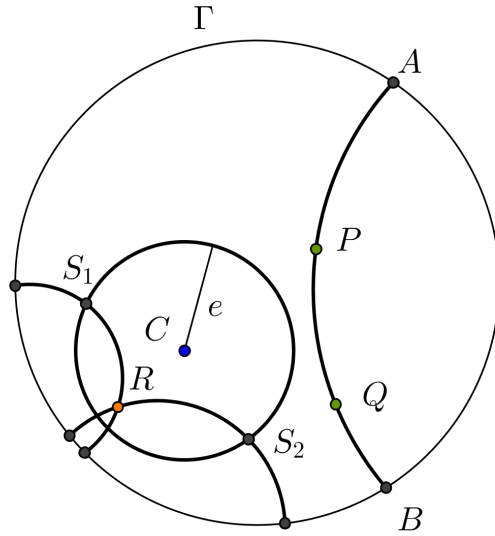
3.1. Konforminen malli. Konformisessa mallissa hyperbolisen geometrian pisteinä ovat minkä tahansa Euklidisen ympyrän sisäpisteet (eli Euklidinen kiekko) ja geodeeseinä (”suorina”) sellaiset ympyräkaaret, jotka leikkaavat kiekon reunaa kohtisuorasti, mukaanlukien ympyrän halkaisijat. Nimi ’konforminen’ kertoo, että tässä mallissa kulmien koko säilyy verrattuna Euklidiseen geometriaan eli esimerkiksi suorat kulmat näyttävät Euklidisilta suorilta kulmilta. Kuvasta 2 nähdään hyvin, että Euklidisen tasogeometrian paralleeliaksioma ei päde tämän mallin suorille. Merkitään jatkossa tätä ympyrää Γ :lla, jolloin Poincarén kiekon muodostaa kaikki ympyrän Γ sisällä olevat pisteet.

KUVA 2. Poincarén kiekko



Ympyröitä konformisessa mallissa ovat kaikki Γ :n sisällä olevat Euklidiset ympyrät, mutta niiden hyperbolinen keskipiste ei vastaa Euklidista keskipistettä (ellei ympyrän keskipiste ole Γ :n keskipiste). Määritellään seuraavaksi Poincarén kiekkoon hyperbolinen metriikka Euklidisen etäisyyden avulla ja tarkastellaan sitten miten se vaikuttaa ympyrän hyperboliseen keskipisteeseen ja säteeseen.

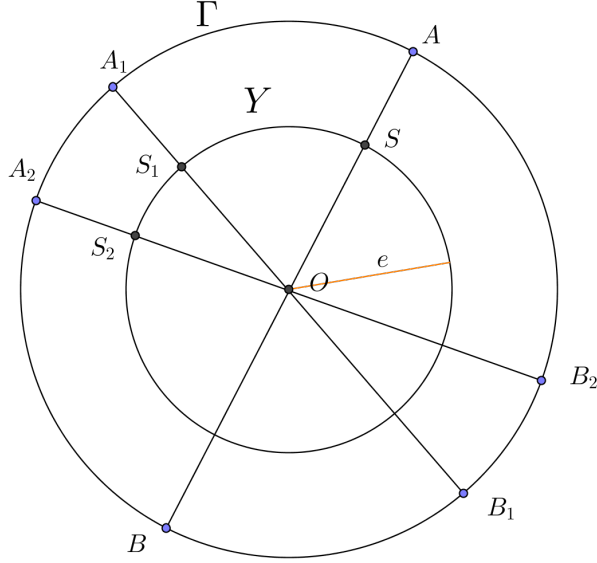
KUVA 3. Etäisyys hyperbolisessa geometriassa



Olkoot pisteet P ja Q Poincarén kiekon pisteitä ja olkoot A ja B ne pisteet, joissa P :n ja Q :n kautta kulkeva ympyräkaari leikkaa Γ :n (ks. Kuva 3). Merkitään pisteiden P ja Q välistä Euklidista etäisyyttä $|PQ|$ (vastaavasti muiden pisteiden väliset etäisyydet). Nyt pisteiden P ja Q välinen hyperbolinen etäisyys $|PQ|_h$ on

$$|PQ|_h = \log \frac{|AQ| \cdot |BP|}{|AP| \cdot |BQ|}.$$

Logaritmi-funktion ominaisuuksista seuraa, että pisteiden hyperbolinen etäisyys voi kasvaa mielivaltaisen suureksi pisteiden lähestyessä Poincarén kiekon reunaa. Tästä seuraa mm. se, että Kuvan 3 ympyrän *hyperbolinen keskipiste* R on lähempänä kiekon reunaa (Euklidisen etäisyyden mielessä), kuin sen Euklidinen keskipiste C . Poikkeuksen muodostavat ympyrät, joiden keskipiste on Γ :n keskipiste. Tarkastellaan hyperbolista etäisyyttä tällaisen ympyrän avulla.

KUVA 4. O -keskinen ympyrä konformisessa mallissa

Olkoon Y ympyrä, jonka Euklidinen keskipiste on Γ :n keskipiste O ja Euklidinen säde e (Kuva 4). Nyt siis kaikille ympyrän Y pisteille S pätee $|OS| = e$. Pisteiden O ja S välinen hyperbolinen etäisyys taas on

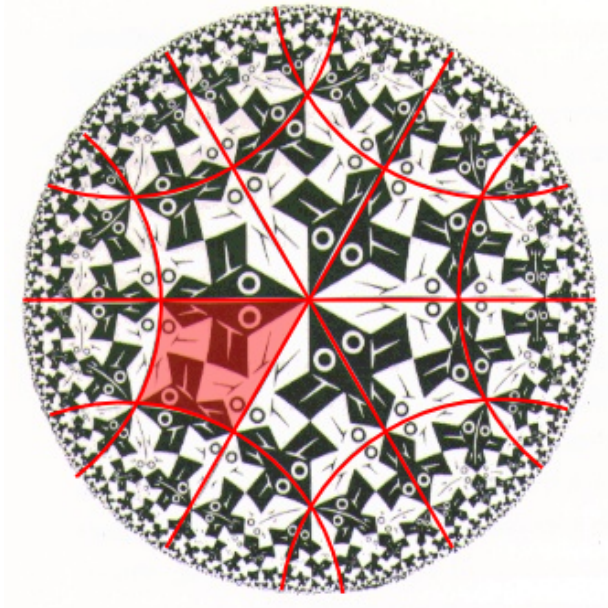
$$|OS|_h = \log \frac{|AO| \cdot |BS|}{|BO| \cdot |AS|} = \log \frac{|BS|}{|AS|},$$

missä A ja B ovat pisteen S kautta kulkevan (ympyrän Γ) halkaisijan päätepisteet. Huomataan, että jos S_1 ja S_2 ovat mielivaltaisia ympyrän Y pisteitä, niin

$$\frac{|B_1S_1|}{|A_1S_1|} = \frac{|B_2S_2|}{|A_2S_2|} \text{ ja siten } |OS_1|_h = |OS_2|_h,$$

kun A_i ja B_i ovat pisteen S_i ($i = 1, 2$) kautta kulkevan halkaisijan päätepisteet. Siis Y :n hyperbolinen keskipiste on todella O ! Toisaalta, jos ympyrän Y Euklidista sädettä kasvatetaan (kuitenkin Γ :n sisällä pysyen) eli piste S lähestyy pistettä A , niin Y :n hyperbolinen säde kasvaa rajatta, sillä

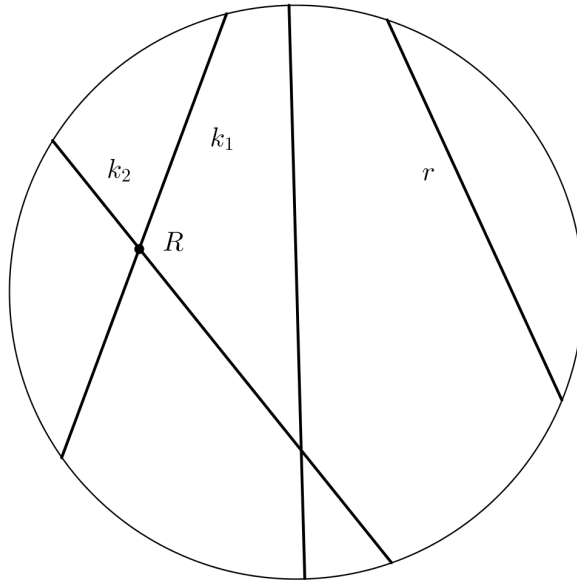
$$|OS|_h = \log \frac{|BS|}{|AS|} \longrightarrow \infty, \text{ kun } |AS| \longrightarrow 0.$$

KUVA 5. M. C. Escher: *Circle Limit I*

Escherin teos (Kuva 5), havainnollistaa hyperbolista geometriaa konformisessa mallissa. Kuvaan on piirretty nelikulmioita, joiden kulmien summan muistetaan hyperbolisessa geometriassa olevan aina alle 2π rad ($= 360^\circ$).

3.2. Projektiivinen malli. Hyperbolista geometriaa voidaan visualisoida myös projektiivisellä mallilla, Kleinin kiekolla, jossa tasana on jälleen jokin Euklidinen kiekko. Geodeesejä ovat kaikki kyseisen kiekon jänteet, halkaisijat mukaanluettuina. Kuvasta 6 nähdään, että Euklidisen geometrian paralleeliaksioma ei päde: Pisteen R kautta voidaan piirtää ainakin kaksi suoraa, k_1 ja k_2 , jotka eivät leikkaa suoraa r .

KUVA 6. Kleinin kiekko

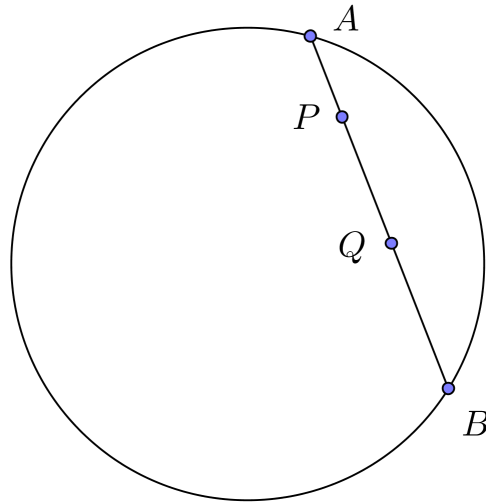


Projektiiviselle mallille voidaan valita metriikka, joka on miltei sama kuin konformisessa mallissa: Olkoot P ja Q pisteitä kiekossa ja A ja B niitä yhdistävän ympyrän janteen päätepisteet ympyrällä. Projektiivisessä mallissa pisteiden P ja Q välinen (hyperbolinen) etäisyys, jota merkitsemme $|PQ|_p$, saadaan kaavalla (ks. myös Kuva 7)

$$|PQ|_p = \frac{1}{2} \log \frac{|AQ| \cdot |BP|}{|AP| \cdot |BQ|}.$$

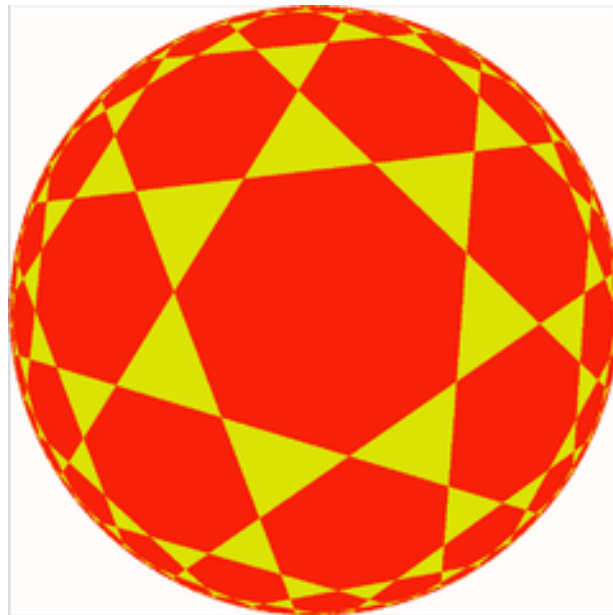
Ympyröitä tässäkin mallissa ovat Euklidiset ympyrät, mutta ympyröiden keskipisteet ovat jälleen lähempänä Kleinin kiekon reunaa, kuin niiden Euklidiset keskipisteet, ellei keskipiste ole Kleinin kiekon keskipiste. Samaan tapaan konformisen mallin kanssa, Kleinin kiekon reunan voi ajatella olevan ”äärettömyys”.

KUVA 7. Etäisyys Kleinin kiekossa



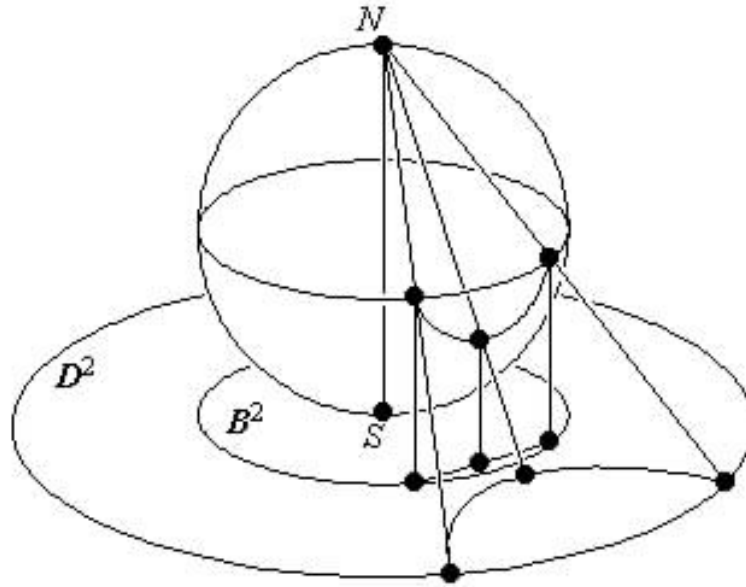
Kuvassa 8 näkyy kuinka Kleinin kiekkomallissa hyperbolinen taso voidaan täyttää 7-kulmioilla ja kolmioilla – tämä on mahdotonta Euklidisessä tasossa!

KUVA 8. Esimerkki tason täyttämisestä 7-kulmioilla ja kolmioilla Kleinin kiekkomallissa



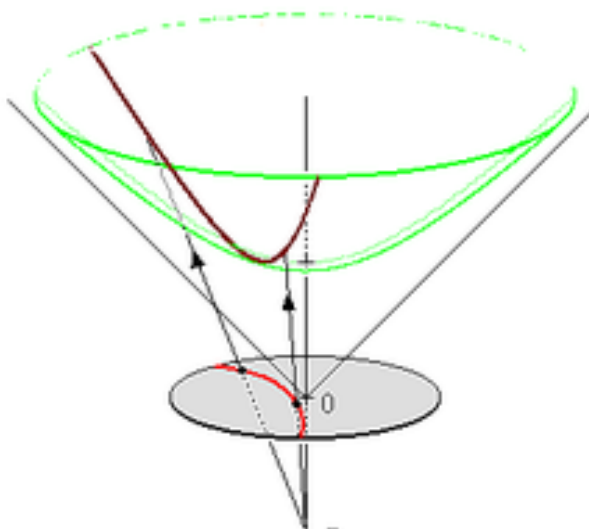
3.3. Puolipallomalli. Edellä esiteltyt konforminen ja projektiivinen malli eivät ole kovin kaukana toisistaan ja Beltramin *puolipallomalli* yhdistää ne projektioiden kautta. Yksi tapa esittää tämä on Kuvan 9 avulla, jossa Beltramin puolipallomalli näyttäytyy pallon ”eteläpuoliskona” ja sen geodeesejä ovat sellaiset ympyrän kaaret, jotka leikkaavat kohtisuorasti päiväntasaajaa. Kuvassa 9 on piirretty yksi näistä geodeeseistä. Kleinin kiekko (kuvassa B^2) saadaan ottamalla kohtisuora projektiio puolipallosta tasolle, joka on etelänavan (kuvassa piste S) tangenttitaso. Kuvassa näkyy, että tällä projektiolla puolipallo kuvautuu kiekoksi ja puolipallomallin geodeesit Kleinin kiekon geodeeseiksi. Konforminen malli (kuvassa D^2) taas saadaan projisoimalla puolipalloa pohjoisnavan (piste N) kautta samaiselle tasolle eli ottamalla stereografinen projektiio pallon eteläpuoliskosta. Tällöin eteläinen puolipallo kuvautuu jälleen rajoitetuksi kiekoksi ja puolipallomallin geodeesit konformisen mallin geodeeseiksi.

KUVA 9. Beltramin mallit



3.4. **Yhteys suhteellisuusteoriaan.** Hyperbolinen geometria ei ole pelkästään matemaatikoiden abstrakti kuvitelma tai taiteilijoiden leikkikenttä. Voimme nimittäin ymmärtää Einsteinin suppeaa suhteellisuusteoriaa, ja sitä kautta havaitsemaamme maailmaa, hyperbolisen geometrian avulla! Liikkuvien kappaleiden Minkowskin 4-ulotteiseen *aika-avaruuteen* piirtämien polkujen tarkastelussa voidaan nimittäin käyttää apuna *hyperboloidimallia*, joka taas sopivalla projektiolla palautuu Poincarén kiekkomalliin. Kuvassa 10 on vihreällä värillä piirretty hyperboloidin ”yläpuolikas” ja koko hyperboloidi kuvaa Minkowskin aika-avaruuden yksikköpallon pintaa. Tarkastelussa yksi avaruusulottuvuus täytyy tiputtaa pois, jotta voimme kuvata sitä 3-ulotteisesti. Hyperboloidipinnan yläpuolikkaan pisteet kertovat massiivisten kappaleiden mahdolliset nopeusvektorit valokartiassa. Kiinnostunut lukija voi lukea aiheesta tarkemmin Penrosen kirjasta [8, Luku 18].

KUVA 10. Hyperboloidimalli

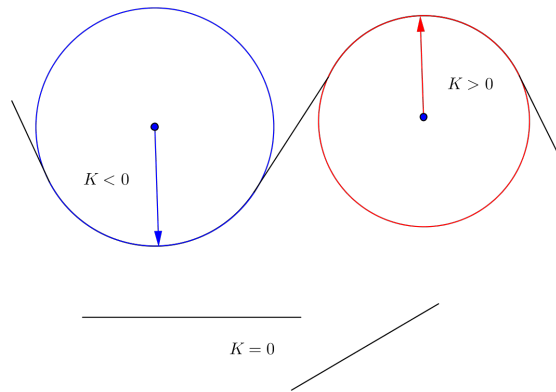


4. HYPERBOLINEN PINTA

Maan pallonmuoto tiedettiin kyllä jo Eukleideen aikaan, mutta Gaussin nimeä kantava *kaarevuus* määriteltiin vasta pari tuhatta vuotta myöhemmin. 1800-luvulla pintoja tutkiva matematiikan ala *differentiaaligeometria* otti suuren harppauksen, kun Gauss osoitti, että kaarevuus on (käyrän) pinnan ominaisuus, joka voidaan laskea myös ilman perspektiiviä (toisesta) kolmannelta ulottuvuudesta. Maapallon Gaussinen kaarevuus on likimain positiivinen (vakio) ja se sai matemaatikot pohtimaan, onko olemassa kaarevuudeltaan negatiivisia, ns. *hyperbolisia* pintoja. Hyperbolinen geometria sai nimensä tästä, mutta vasta kun se osattiin yhdistää pintaan, jonka kaarevuus on negatiivinen vakio. Hyperbolisiin pintoihin hyvin käytännönläheisen ja havainnollisen lähestymistavan lukija löytää esimerkiksi Daina Taiminan kirjasta [9], jossa on erityisesti virkkausohjeita hyperbolisen pinnan tuottamiseksi! Kuvassa 14 oleva virkkaus on tehty juuri kyseisestä kirjasta löytyvällä ohjeella.

4.1. **Kaarevuus.** Yksiulotteisen käyrän tapauksessa kaarevuus K tietyssä pisteessä saadaan sen ympyrän säteen R käänteislukuna, $K = 1/R$, joka on sovitettu käyrälle sivuamaan kyseistä pistettä. Valitsemalla käyrälle suunta voidaan erottaa *positiivinen* ja *negatiivinen* kaarevuus. Kuvassa 11 käyrän kaarevuus on positiivinen, kun sovitettu ympyrä on käyrän alapuolella ("kukkula"), ja negatiivinen, kun sovitettu ympyrä on käyrän yläpuolella ("kuoppa").

KUVA 11. Käyrän kaarevuus



Mitä suurempi säde kaarevuuden kertovalla ympyrällä on, sitä pienempi kaarevuus on itseisarvoltaan. Toisin sanoen, kun $R \rightarrow \infty$, niin $K \rightarrow 0$. Tapaus $R = \infty$ vastaa suoran viivan tilannetta, eli suoran viivan kaarevuus on 0.

2-ulotteisen pinnan (Gaussinen) kaarevuus tietyssä pisteessä saadaan yksiulotteisen kaarevuuden avulla: Asetetaan pinnan pisteeseen, jossa kaarevuus halutaan selvittää, normaalivektori (vektori, joka on kohtisuorassa pisteeseen asetettua tangenttitasoa vastaan). Kaikkien normaalivektorin sisältävien tasojen leikkaukset pinnan kanssa ovat yksiulotteisia käyriä, joille voidaan laskea kaarevuus edellä mainitulla tavalla. Valitaan kaikista näistä

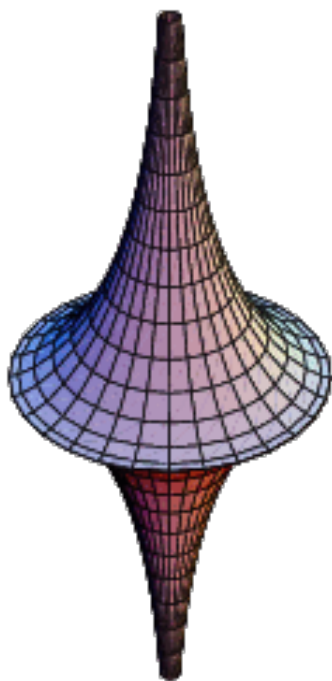
suurin ja pienin kaarevuus, niin sanotut *pääkaarevuudet* K_{max} ja K_{min} . Pinnan kaarevuus K kyseisessä pisteessä saadaan näiden tulona:

$$K = K_{max} \cdot K_{min} = \frac{1}{R_{min}R_{max}}.$$

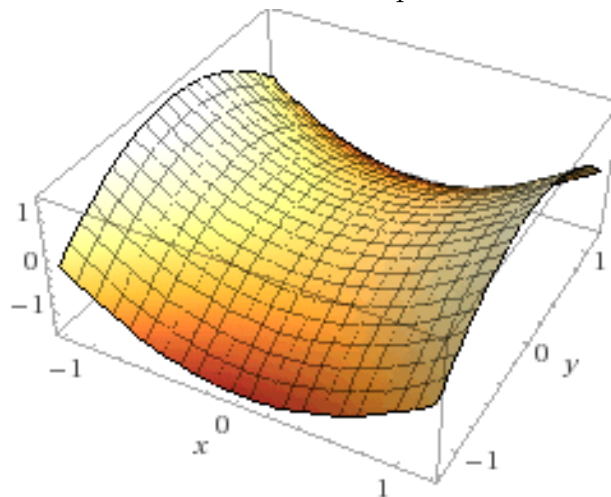
Tasoa vastaa tilanne, missä molemmat pääkaarevuudet ovat 0, joten tason kaarevuus $K = 0$. Yllä olevasta kaarevuuden kaavasta nähdään, että pinnan kaarevuuden etumerkki riippuu pääkaarevuuksista: Jos ne ovat etumerkiltään samat, niin kaarevuus on positiivinen, ja muutoin negatiivinen. Esimerkiksi pallopinnan jokaisessa pisteessä molemmat pääkaarevuudet ovat $1/R$, missä R on pallon säde. Siis pallopinnalla on kaikkialla positiivinen vakiokaarevuus $1/R^2$. Hyperboliseksi pinnaksi sanotaan pintaa, jonka kaarevuus on jokaisessa pinnan pisteessä sama negatiivinen luku. Hyperbolinen geometria sai nimensä tästä, kun ymmärrettiin, että tällaisella pinnalla pätevät hyperbolisen geometrian lait. Esimerkiksi hyperbolisen geometrian oma paralleeliaksioma **H5** on helppo nähdä toteutuvan seuraavaksi tulevissa esimerkeissä!

4.2. Esimerkkejä. Jotta hyperbolisen geometrian lait toimivat pinnalla, on oleellista, että sen kaarevuus on negatiivinen *vakio*. Yksi ensimmäisistä keksityistä hyperbolisista pinnoista oli *pseudopallo* (Kuva 12). Nimensä pseudopallo on saanut siitä, että sen kaarevuus vastaa sellaisen pallopinnan kaarevuutta, jonka säde on imaginaarinen — aivan kuten Lambert arveli! Jos siis pseudopallo on pallo, jonka säde on iR , missä $i = \sqrt{-1}$ on imaginaariyksikkö, niin pseudopallon kaarevuus on $K = 1/(iR)^2 = -1/R^2$. Usein *hyperbolinen paraboloidi*, ns. satulapinta (Kuva 13), tulee mieleen hyperbolisista pinnoista puhuttaessa. Vaikka sen kaarevuus onkin kaikkialla negatiivinen, kaarevuus ei kuitenkaan ole vakio, joten se ei ole hyperbolinen pinta.

KUVA 12. Pseudopallo



KUVA 13. Satulapinta



Kuvassa 14 on yksi esimerkki hyperbolisesta pinnasta, jossa pintaan värillisillä langoilla merkityt yksiulotteiset pääkaarevuudet nähdään olevan erimerkkiset.

KUVA 14. Esimerkki hyperbolisesta pinnasta



Maapallollamme elävät kasvitkin ovat ymmärtäneet hyperbolisen pinnan mahdollisuudet. Esimerkiksi lehtikaalin tai korallien muoto muistuttaa hyperbolista pintaa (ks. kuvat 15 ja 16). Tämän ominaisuuden hyöty kasveille on, että ne saavat enemmän pinta-alaa käyttöön imeäkseen ravinteita.

KUVA 15. Lehtikaali



KUVA 16. Koralli



5. LOPUKSI

Hyperbolisen geometrian löytäminen mullisti geometrian avaten tien uusille aksiomaattisille järjestelmille ilman riippuvuutta Euklidiseen geometriaan. Tämä on johtanut kokonaan uusille urille matematiikassa. Lisäksi analyysin yhdistäminen geometriaan on tuonut aivan uusia ulottuvuuksia tutkimuskysymyksiin. Kaarevuuden käsitteen mukaantulo aloitti differentiaaligeometrian, joka on erittäin aktiivinen tutkimusala tänäkin päivänä. Reilussa sadassa vuodessa näkökulmamme on laajentunut maailmasta koko maailmankaikkeuteen, jonka geometriaa yritetään parhaillaan kiivaasti selvittää. Osa fyysikoista uskoo maailmankaikkeuden rakenteen selittyvän ns. säieteoriolla, jonka lähtökohtana on 9-, 10-, 11- tai jopa 26-ulotteinen aika-avaruus. On vaikea kuvitella, että kuvamme maailmankaikkeudesta olisi kehittynyt näin pitkälle, mikäli hyperbolista geometriaa ei olisi koskaan löydetty.

VIITTEET

- [1] Richard Courant & Herbert Robbins. *What is mathematics? An elementary approach to ideas and methods*. Oxford University Press, New York, second edition, 1996.
- [2] Jeremy Gray. *Ideas of space. Euclidean, non-Euclidean, and relativistic*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, second edition, 1989.
- [3] Marvin Jay Greenberg. *Euclidean and non-Euclidean geometries: development and history*. W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1973.
- [4] Matti Lehtinen. *Matematiikan historia*. Luentomoniste, 2000.
- [5] Matti Lehtinen. *Geometrian perusteet*. Luentomoniste, 2013.
- [6] Adolf Mader. A Euclidean model for Euclidean geometry. *Amer. Math. Monthly* **96(1)**: 43–49, 1989.
- [7] Leonard Mlodinow. *Euclid's window. The story of geometry from parallel lines to hyperspace*. Free Press, New York, 2001.
- [8] Roger Penrose. *The road to reality. A complete guide to the laws of the universe*. Alfred A. Knopf, Inc., New York, 2005.
- [9] Daina Taimiņa. *Crocheting adventures with hyperbolic planes*. A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 2009.

KUVAT

Kansikuva, Kuvat 1 ja 14 ©Riikka Schroderus (virkkkaus tehty kirjan [9] ohjeella)
 Kuvat 2, 3, 4, 6, 7 ja 11 piirretty *Geogebra*lla (ohjelmisto ladattavissa osoitteessa geogebra.org)
 Kuva 5: euler.slu.edu/escher/index.php/Hyperbolic_Geometry
 Kuva 8: thefullwiki.org/Klein_model
 Kuva 9: math.cornell.edu/~dwh/books/eg99/Ch16/Ch16.html
 Kuva 10: en.wikipedia.org/wiki/Hyperboloid_model
 Kuva 12: mathworld.wolfram.com/Pseudosphere.html
 Kuva 13 piirretty *Wolfram Alpha*:lla (wolframalpha.com)
 Kuva 15: health.com/health/gallery/0,,20675570,00.html
 Kuva 16: wwf.org.au/our_work/saving_the_natural_world/oceans_and_marine/priority_ocean_places/coral_triangle/coral_sea/