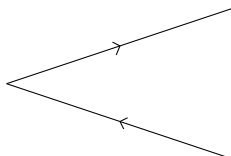


## Matematiikkaa kaikille

Syksy 2016

Pienryhmätehtävät 5

- (1) Pelaa ristinollaa toruksella, kleinin pullolla tai projektiivisella tasolla vierustoverisi kanssa.
  - (2) Askartele ohjaajien johdolla möbiuksen nauha ja leikkaa se keskiviivaa pitkin halki. Ennen leikkausta koita "nähdä" mitä leikkaaminen synnyttää.
  - (3) Askartele hyperbolista tasoa liitteenä olevien ohjeiden<sup>1</sup> mukaan ja ohjaajan opastuksella.
    - (a) Piirrä hyperboliseen tasoon kolmio ja mittaa sen kulmien summa.
    - (b) Vaikuttaako kolmion koko kolmion kulmien summaan?
  - (4) Katso oheista pienistä kolmioista koostuvaa laatoitusta. Väritä kaikki alkupistettä koskevat kolmiot punaisella, ja kirjoita ylös niiden lukumäärä. Väritä seuraavaksi sinisellä kaikki kolmiot jotka koskettavat jotain punaista kolmiota ja kirjoita ylös punaisten ja sinisten kolmioiden lukumäärä. Jatka värittämällä vuorotellen sinisiksi ja punaisiksi kolmiot, jotka koskettavat punaisia tai sinisiä kolmioita, ja pidä kirjaa montako kolmiota kunkin askeleen jälkeen on yhteensä väritetty.
    - (a) Kasvaako väritettyjen kolmioiden määrä kuten jokin tuttu polynomi?
    - (b) Tee seuraavaksi sama hyperbolisella tasolla, ja vertaa tason tapahtumaan.
- Jos laskeminen on hankalaa tekemälläsi tasolla, voit käyttää myös oheista kuvaa<sup>2</sup>.
- (5) Mitä kaksiulotteista kappaletta oheinen kuvio esittää?



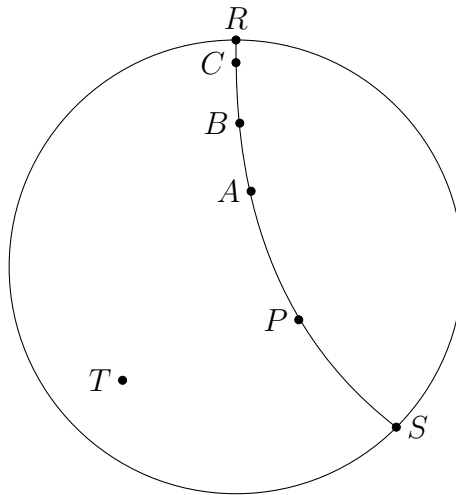
---

<sup>1</sup>Liimausohjeet on kopioitu Jeffrey Weeksin kirjasta "The Shape of Space". Olkoon tämä samalla lukuvinkinä!

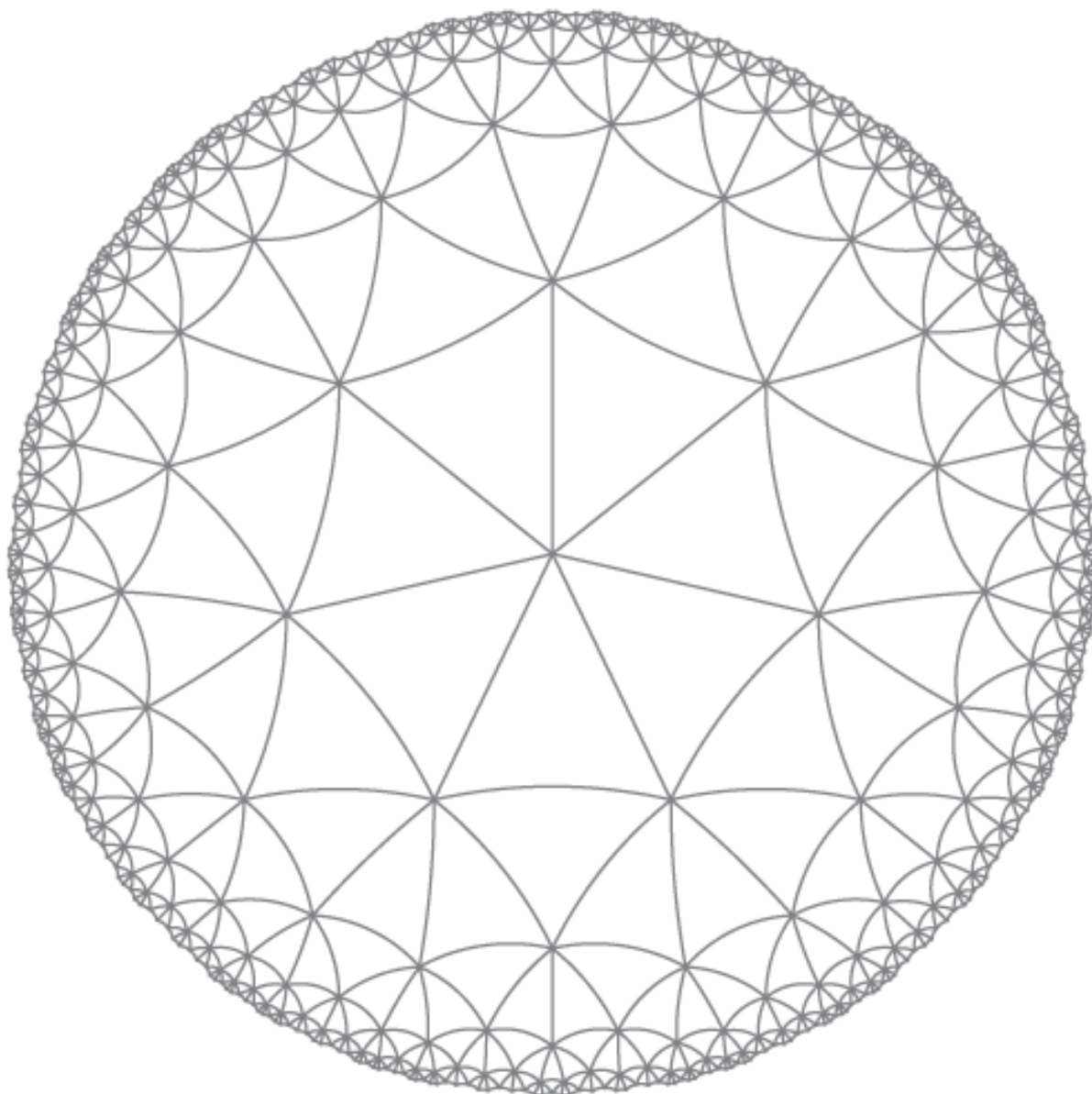
<sup>2</sup>Kuva kopioitu sivulta <http://maxwelldemon.com/2008/10/25/mathematics-computers-and-zeilberger/>

- (6) Tutkitaan euklidisia ja hyperbolisia etäisyyksiä. Alla oleva kuva esittää Poincarén kiekkoa, ja pisteet  $R$  ja  $S$  kuuluvat sen reunaan. Pisteiden  $P$  ja  $A$  välinen hyperbolinen etäisyys saadaan laskettua euklidisista etäisyyksistä seuraavasti:

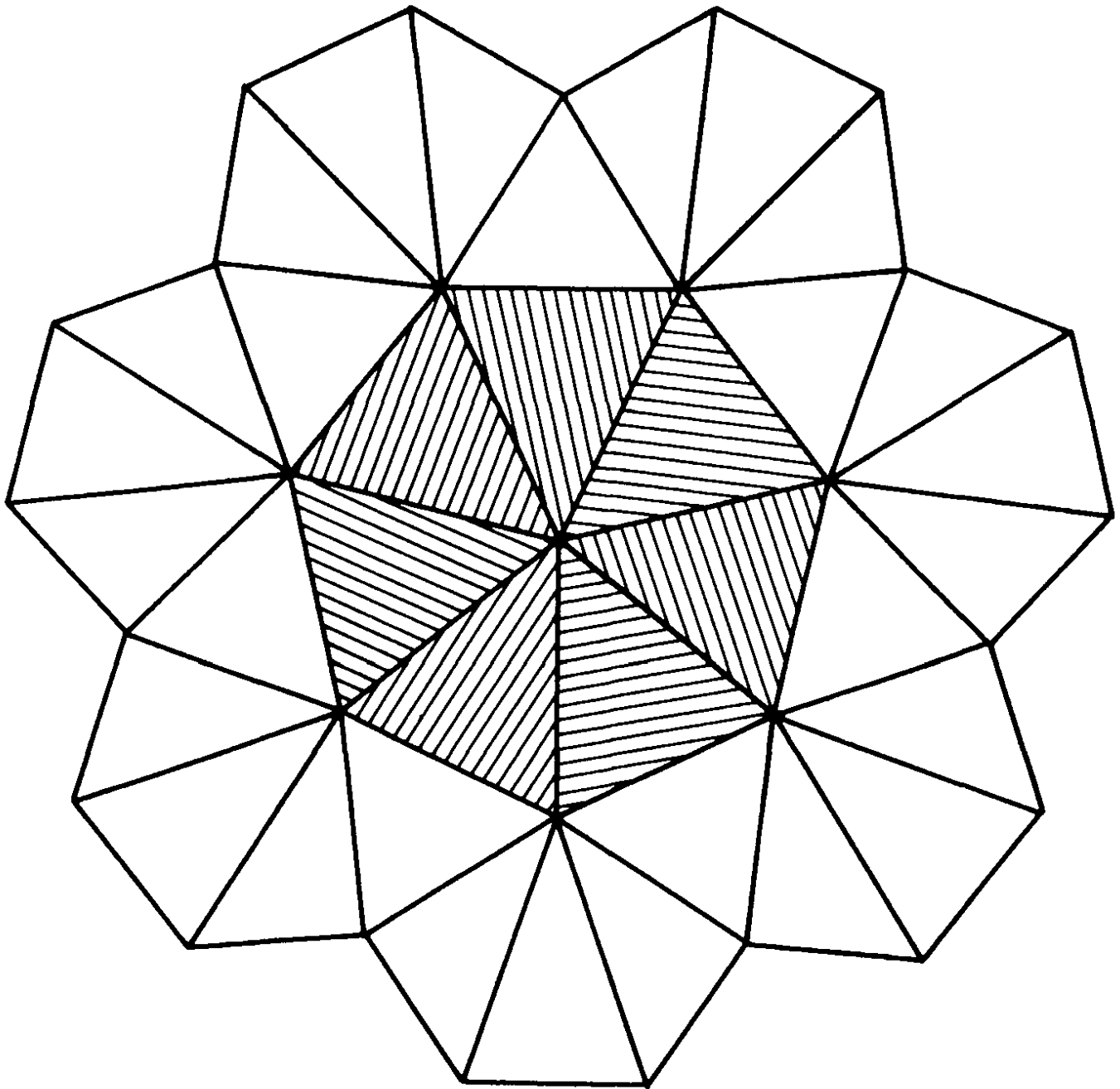
$$|PA|_h = \log \frac{|RP| \cdot |SA|}{|RA| \cdot |SP|}.$$



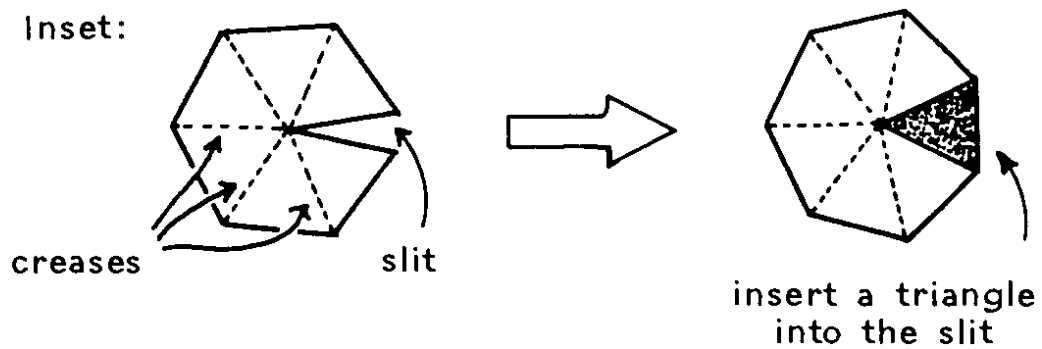
- (a) Mittaa hyperboliset etäisyydet  $|PA|_h$ ,  $|PB|_h$  ja  $|PC|_h$ . Mitä hyperboliselle etäisyydelle tapahtuu kiekon reunalla? Vinkki: voit piirtää vastaavan mutta isomman ympyrän pöytään ja mitata etäisyydet esimerkiksi narun avulla.
- (b) Miltä näyttää ympyrä, jonka hyperbolinen keskipiste on kuvan piste  $T$ ?
- (c) Onko olemassa ympyrää, jonka euklidinen ja hyperbolinen keskipiste ovat samat?



Kuva 1: Hyperbolista kolmiointia



Inset:



**Figure 10.3** (See Exercise 10.1) Tape equilateral triangles together so that seven meet at each vertex. The inset shows a good way to get started.

